

SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Estudia si son equivalentes los sistemas:

$$a) \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - z = 2 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ 2x - y = 3 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - 3y + z = -1 \\ -x + y - z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 3y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -3x - z = -3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 4 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

Sol: a) Sí; b) Sí; c) No; d) Sí

2. Estudia, y resuelve cuando sean compatibles, los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - 2z = 5 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x + 3y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2x + z = 3 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Sol: a) S.C.D.; $x=1$; $y=0$; $z=-1$; b) S.C.I.; $x=0$; $y=1$; $z=0$; c) S.I.

3. Discute, según los valores de los parámetros, los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} ax + 2y + z = 2 \\ x + ay - z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} ax + y = a \\ x + ay = 0 \\ y = a \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = a+1 \\ ax + y = 0 \\ -x = a+1 \end{cases}$$

Sol: a) $a=1$ S.C.I.; $a=-2$ S.I.; $a \neq 1$ y $a \neq -2$ S.C.D.; b) $a=0$ S.C.I.; $a \neq 0$ S.I.; c) $a=2$ S.C.D.; $a \neq 2$ S.I.

4. Estudia y resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + 3y - 2z = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 3y - z = 5 \\ -3x + y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y + z = -1 \\ 3x - z = 4 \end{cases}$$

Sol: a) S.I.; b) S.C.I.; $x=2; y=2; z=1$; c) S.C.D. $x=1, y=2, z=-1$

5. Estudia y resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x - z = 2 \\ -x + 2y - z = -3 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 3 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Sol: a) S.C.D. $x=1, y=-1, z=0$; b) S.C.I.; $x=1, y=-2, z=2$; c) S.C.I. $x=2, y=2, z=1$

6. Elimina los parámetros en los sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x = a + b \\ y = 2a \\ z = -a + b \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 1 + a + b \\ y = 2 - a \\ z = 2a - b \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = 1 - a \\ y = 2a \\ z = 2 + a \end{cases}$$

Sol: a) $x-y-z=0$; b) $x+3y+z=7$; c) $2x+y=2, x+z=3$

7. Calcula a y b para que los sistemas sean compatibles:

$$\text{a) } \begin{cases} x + ay + z = -1 \\ y + 2z = 1 \\ x + y - z = -a \\ -x + bz = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - ay + bz = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ ax - by + z = 0 \end{cases}$$

Sol: a) $a=2$ y $b=3$; b) $a \neq 0, b \neq 0$

8. ¿Para qué valores de m es compatible el siguiente sistema?

$$\text{a) } \begin{cases} (m+2)x + y + 2z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{Sol: } m=1 \text{ ó } m=0$$

9. Discute los sistemas:

$$a) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + a = a \end{cases} \quad b) \begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ -x + y = 1 \\ y + a = 1 \\ ax + y + 2z = a \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + ay + 3z = 1 \\ ax + 3y + 4z = 0 \\ 3x + (a+2)y + 5z = a-3 \end{cases}$$

Sol: a) $\hat{a}=1$ S.C.I.; $\hat{a}\dots 1$ S.C.D.; b) $\hat{a}=1$ S.C.I.; $\hat{a}=-2$ S.I.; $\hat{a}\dots 1$ y $\hat{a}\dots -2$ S.C.D.; c) $\hat{a}=2$ S.C.I.; $\hat{a}=5$ S.I.; $\hat{a}\dots 2$ y $\hat{a}\dots 5$ S.C.D.

10. Calcula "a" para que los siguientes sistemas sean compatibles

$$a) \begin{cases} 2x + ay + z = 0 \\ 3x - 2y + az = 0 \\ ax - y + z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -ax + y - z = 1 \\ 2ax + y - z = 0 \\ -ay + z = 2a \\ ax = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (a-1)x - 2y = 2 \\ -x + y + az = 0 \\ -y + 2z = a \end{cases}$$

Sol: a) $a=0$; b) $a=-1$; c) $a=2$

11. Resuelve los siguientes sistemas matricialmente, sin aplicar Cramer ni Gauss:

$$a) \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - z = 0 \\ x - y + 3z = 8 \end{cases} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Sol: a) $x=1, y=-1, z=2$; b) $x=2, y=1, z=1$; c) $x=0, y=1, z=-1$

12. Discutir los sistemas según los valores de k:

$$a) \begin{cases} kx - 2y - (k+2)z = k-1 \\ x + ky = k \\ -x + 2y + (k+2)z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y + 2z = k \\ y - kz = 2 \\ kx + ky = 5 \end{cases}$$

Sol: a) $k=0$ S.I.; $k=1$ S.C.I.; $k=-2$ S.C.D.; $k\neq 0, k\neq 1$ y $k\neq -2$ S.C.D.; b) $k=0$ S.I.; $k=1$ S.C.I.; $k\neq 0$ y $k\neq 1$ S.C.D.

13. Elimina parámetros:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2 \\ z = 1 - 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 - 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = a + b \\ y = a \\ z = a - b \\ t = a + 2b \end{cases}$$

$$\text{Sol: a) } \begin{cases} -x + y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = 2 \\ x - z = 2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - t = 0 \end{cases}$$

14. Resuelve los sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 3y + z = -1 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y - z = -1 \\ 3x + y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ y - z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y = 2 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ -x - 4y - 11z = 1 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x - y = 2 \\ x + 3y - z = -4 \end{cases}$$

Sol: a) S.I.; b) $x=0, y=1, z=2$; c) $x=1-\ddot{e}, y=\ddot{e}, z=\ddot{e}$; d) $x=2\ddot{e}, y=1-\ddot{e}, z=\ddot{e}$; e) S.I.; f) $x=1, y=-1, z=2$

15. Discute los siguientes sistemas según los valores de los parámetros:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + z + t = 1 \\ ax + y - 2z = 3 \\ -x + 2y - z - t = a \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x + 2z = 5 \\ x + y + z = a \\ 2x - y - 3z = -2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Sol: a) $\ddot{a}=-1$ S.C.I., $\ddot{a}\dots-1$ S.C.D.; b) $a=3$ S.C.D., $a\neq 3$ S.I.; c) $a=1$ S.C.I.; $a=-2$ S.I.; $a\neq 1, a\neq -2$ S.C.D.

16. Resuelve los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ 4x - y + 3z = 0 \\ x - 4y - 3z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 2y = 6 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$$

Sol: a) $x=\hat{a}, y=\hat{a}, z=-\hat{a}$; b) $x=1, y=2$

17. Discutir los sistemas según los valores de k:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + ky + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ kx - 4y + kz = 0 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Sol: a) $k=1$ S.C.I., $k \neq 1$ S.C.D.; b) $k=3$ S.C.I., $k \neq 3$ S.C.D.; c) $k=3$ S.C.I., $k \neq 3$ S.C.D.

18. Resuelve por Cramer el siguiente sistema:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = -4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases}$$

Sol: $x=1; y=2; z=-3$

19. Elimina parámetros a, b:

$$a) \begin{cases} x = a + b \\ y = 2a - 3b \\ z = a + b \end{cases} \quad b) \begin{cases} x = a + 1 \\ y = 2a - b \\ z = a + b - 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = a \\ y = a - 1 \\ z = 2 - a \end{cases} \quad d) \begin{cases} x = a \\ y = a - b \\ z = 1 - a \\ t = a + b \end{cases}$$

Sol: a) $x=z$; b) $3x-y-z=4$; c) $x-y=1, x+z=2$; d) $x+z=1, 2x-y-t=0$

20. En el sistema halla \hat{m} para que:
$$\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases}$$

- a) No tenga solución
 - b) Tenga infinitas soluciones
 - c) Tenga solución única
 - d) Tenga una única solución en la que $x=3$
- Sol: a) $\hat{m}=1$; b) $\hat{m}=-1$; c) $\hat{m} \neq 1$; d) $\hat{m}=-1/2$

21. Discutir el sistema para los distintos valores de k:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - y + kz = 2 \\ y - z = 1 \\ x + 8y + z = 3 \end{cases}$$

Sol: k=2 S.C.D.; k...2 S.I.

22. Resolver:

a)
$$\begin{cases} x + 2y = 6 + z \\ 2x + 3z = 2 + y \\ x + 2z = y \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} z + x = 2 + 3y \\ 2x + 3z = y - 1 \\ z + 5y = -3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x = 2 - 2y \\ y + x = 1 + z \\ x = 2z \end{cases}$$

Sol: a) x=3, y=1, z=-1; b) S.I.; c) x=2, y=1, z=0

23. Discute el sistema:

$$\begin{cases} x + ay + az = 1 \\ -x + ay + az = -1 \\ 3x - ay - az = 3 \end{cases}$$

Resuelve por el método de Gauss.

Sol: S.C.I.; x=1, y=0, z=0

24. Resuelve el siguiente sistema matricialmente, sin aplicar Cramer ni Gauss.

$$\begin{cases} x - y + 3z = -1 \\ 2x - y - z = 0 \\ 3x + z = 3 \end{cases} \quad \text{Sol: } x = 1; y = 2; z = 0$$

25. Discutir y resolver los sistemas según los valores de los parámetros:

a)
$$\begin{cases} kx - y + 2z = 0 \\ x + 3y - kz = 2k \\ 4y - 3z = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + ky - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ x - ky + z = 2 \\ 4x + 3y - z = -k \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} kx - y + kz = k \\ x - y - kz = 1 \\ (k-1)x - 2kz = k \end{cases}$$

Sol: a) k=1 S.C.I.; k=5/4 S.I., k...1 y k...5/4 S.C.D.; k=1

b) k=1 ó k=-25/6 S.C.D., k...1 y k...-25/6 S.I.

c) S.I.

26. Estudia y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2y + z = 4 \\ 2x - z = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 6y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ 3x - y = 2 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 3y + z = 4 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x + 2y - z - t = -2 \\ 3x - y + z - 3t = -2 \\ x - y - 2z - 4t = -3 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 2x + 3y + z = -4 \\ -x + y + 2z = 3 \\ x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Sol: a) $x=0, y=1, z=2$; b) $x=2\hat{a}, y=\hat{a}, z=\hat{a}$; c) S.I.; d) $x=1, y=1, z=1$; e) $x=3, y=1$; f) $x=\hat{e}-1, y=-\hat{e}, z=1-\hat{e}, t=\hat{e}$; g) S.I.; h) S.I.; i) $x=3, y=-2, z=0$