

GEOMETRIA

1.- Dado el vector $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 3)$ y el punto $B(3, 1, 2)$ halla las coordenadas del punto A. Sol: $A = (1, 2, -1)$

2.- Comprobar si los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} son equipolentes, siendo $A(1, 2, -1)$, $B(0, 3, 1)$, $C(1, 1, 1)$ y $D(0, 2, 5)$. En caso negativo, hallar las coordenadas del punto D' para que \overrightarrow{AB} y $\overrightarrow{CD'}$ sean equipolentes. Sol: $D' = (0, 2, 3)$

3.- Dados los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(3, 2, 2)$ hallar las coordenadas del vector \overrightarrow{AB} y su módulo. Sol: $\overrightarrow{AB}(2, 2, 1)$ $|\overrightarrow{AB}| = 3$

4.- Dados los puntos $A(3, 0, 5)$ y $B(3, 4, 7)$, hallar las coordenadas del punto medio del segmento que determinan. Sol: $(3, 2, 6)$

5.- Las coordenadas de dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1, 1, 1)$ y $B(0, 1, -1)$. Las coordenadas del centro M son $M(2, 2, 2)$. Hallar las coordenadas de los vértices C y D. Sol: $C(3, 3, 3)$; $D(4, 3, 5)$

6.- Dados los vértices $A(3, 0, 1)$ y $B(0, 3, 1)$ que determinan el segmento AB. Hallar las coordenadas de los puntos que dividan el segmento AB en tres partes iguales. Sol: $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$

7.- Las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo ABC son $M(1, 1, 0)$, $N(2, 2, 1)$ y $P(3, 2, 0)$. Hallar las coordenadas de los vértices A, B y C. Sol: $(2, 1, -1)$, $(0, 1, 1)$, $(4, 3, 1)$

8.- En un triángulo ABC el baricentro es $(2, 4, 2)$ el punto medio de BC es $M(3, 6, 3)$ y el punto medio de AC es $N(2, 5, 1)$. Hallar las coordenadas de los vértices A, B y C. Sol: $A(0, 0, 0)$, $B(2, 2, 4)$, $C(4, 10, 2)$

9.- Hallar el baricentro de un tetraedro de vértices $A(1, 3, 1)$, $B(2, 1, 4)$, $C(0, 1, -1)$ y $D(1, -1, 4)$. Sol: $(1, 1, 2)$

10.- Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices $A(1, 2, 0)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(1, 2, 2)$. Sol: $\{(x-1)/0 = y/2 = (z-2)/-1$; $(x-1)/0 = (y-2)/1 = z/-2$; $(x-1)/0 = (y-1)/1 = (z-1)/1$

11.- Hallar las coordenadas del baricentro del triángulo ABC del ejercicio anterior así como el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo anterior. ¿Cómo son ambos baricentros?.

Sol: $(1, 4/3, 4/3)$; Son el mismo.

12.- Dados los puntos $A(2, 1, 2)$ y $B(6, -3, -2)$ hallar tres puntos P, Q y R que dividan al segmento AB en cuatro partes iguales. Sol: $(3, 0, 1)$, $(4, -1, 0)$, $(5, -2, -1)$

13.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 1, -1)$ y $B(3, 0, 1)$. Estudiar si el punto $C(1, 0, 2)$ está alineado con A y B. Sol: $(x-3)/1 = y/-1 = (z-1)/2$; C no está en AB

14.- Comprobar si los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(4, 1, 3)$ y $C(7, 0, 3)$ están alineados. Sol: Sí

15.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 2, 1)$ y lleva la dirección del vector \mathbf{j} . Sol: $\{x=0; z=1\}$

16.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,2,1)$ y tiene por vectores directores $v = i-j$ y $w = 3j+k$. Sol: $x+y-3z=0$

17.- Hallar la ecuación segmentaria del plano que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$. Sol: $x/1+y/2+z/3=1$

18.- Comprobar si los planos que pasan por los puntos $A(2,0,0)$, $B(0,-1,0)$ y $C(0,0,3)$; y por los puntos $A'(-4,0,0)$, $B'(0,2,0)$ y $C'(0,0,-6)$ tienen el mismo vector normal. Sol: Sí

19.- Comprobar si los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,1,-1)$, $C(1,0,3)$, $D(2,1,-1)$ y $E(0,0,0)$ son coplanarios. Sol: No

20.- Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $x=t$; $y=2-t$; $z=2+t$ y por el punto $A(1,0,-1)$. Sol: $5x+4y-z=6$

21.- Escribir la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2,4,1)$ y por la recta de ecuaciones: $(x-1)/1 = (y-2)/2 = z/1$. Sol: El punto A pertenece a la recta, no existe ese plano

22.- Hallar la ecuación del plano que corta a los ejes coordenados en puntos situados a distancia 2 del origen. Sol: $x+y+z-2=0$

23.- ¿Qué relación se ha de verificar entre los parámetros a , b y c para que los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(2,1,0)$ y $D(a,b,c)$ sean coplanarios? Sol: $a+3b+c=5$

24.- Determina la ecuación de la recta que:

a) Está contenida en los planos: $\delta_1/ x-y+z=1$; $\delta_2/ 2x+y=0$

b) Pasa por el punto $A(0,1,0)$ y es paralela a los planos: $\delta_1: 2x+y+z-2=0$ y $\delta_2: x+y+z=2$

c) Pasa por los puntos de corte del plano $2x+3y-6=0$ con los ejes de coordenadas.

Sol: a) $\{x-y+z=1; 2x+y=0\}$; b) $\{2x+y+z-1=0; x+y+z=1\}$; c) $\{z=0; 2x+3y=6\}$

25.- Determina la ecuación del plano que:

a) Corta al eje OX en el punto de abscisa 3 y es paralelo al plano YZ .

b) Contiene a la recta $x/2 = (y-1)/1 = (z+1)/1$ y al punto $P(2,1,0)$.

c) Contiene a las rectas $(x-1)/2 = (y-2)/1 = z/1$ y la $x/4 = y/2 = (z+1)/2$.

d) Contiene a la recta $r/ \{x+y=0; 2x-y+3z=1\}$ y es paralelo al plano $p/ x-y+z=1$.

Sol: a) $x=3$; b) $x-2z=2$; c) $x-y+z+1=0$; d) Imposible

26.- Estudia la posición de los siguientes pares de rectas:

a) $r_1: \{x=1-2t, y=2-t, z=3+t\}$; $r_2: (x-1)/2 = (y+2)/1 = z/1$

b) $r_1: \{x=0, y=1, z=t\}$; $r_2: \{x=2+t, y=-t, z=1+t\}$

c) $r_1: \{x=t, y=2+t, z=-t\}$; $r_2: x/1 = (y-1)/2 = (z+2)/1$

Sol: a) Paralelas; b) Se cruzan; c) Se cortan

27.- Estudia la posición relativa de los siguientes planos según los valores de los parámetros que se indican:

a) $ax-y+2z-2=0$

b) $x+y+2z=0$

$2x-2y+4az=0$

$mx-y=0$

$3x+mz=0$

Sol: a) $a=1$ paralelos; $a \neq 1$ se cortan; b) $m=2$ ó $m=-3$ se cortan en una recta; $m \neq 2$ y $m \neq -3$ se cortan en el $(0,0,0)$

28.- Calcula el valor de "a" para que las rectas "r" y "s" sean coplanarias:
 $r \{ (x-1)/2 = y/1 = (z-3)/-1 \}$; $s \{ x-y+3z-10=0; 3x-y+az+3=0 \}$ Sol: $a = -2$

29.- Determina la ecuación de la recta paralela a la ecuación: $(x-1)/1 = y/2 = z/1$, y que se apoya en las rectas: r {pasa por A(1,1,1) y B(1,3,-1)}; y s {determinada por $3x+4y-z+1=0$ y $x-y=0$ }. Sol: $\{x/1=y/2=(z+1)/1\}$

30.- Estudia la posición relativa del plano $3x-y+az=0$ y la recta r $\{x-y+2z-3=0; x+z=-1\}$, según el valor de a. Sol: $a=4$ paralelos; a ... 4 se cortan.

31.- Dada la recta r $\{ (x-1)/1 = y/1 = (z+2)/-1 \}$ y el plano p $\{x+y+z=0\}$. Determina:

- a) El punto de corte de la recta y el plano.
- b) Los puntos de la recta que distan 3 del plano.

Sol: a) (2,1,-3); b) (5,4,-6), (-1,-2,0)

32.- Dada la recta r: $\{ x-z+1=0; x+y-z-1=0 \}$ y el punto P(0,1,1). Hallar:

- a) Plano que contiene a P y es perpendicular a r.
- b) Distancia del punto P a la recta r.

Sol: a) $x+z=1$; b) $d = 1$

33.- Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,-1,0) y es perpendicular a las rectas r y s: r: $\{x-y=3; x+y-2z=0\}$; s: $\{x-y+z=3; y+z=1\}$. Sol: $\{(x-1)/2=(y+1)/-3=z/1\}$

34.- Calcula el valor del parámetro "a", para que el producto vectorial (1,1,0)H(2,a,0), tenga dirección del eje OZ. Sol: $a=0$

35.- Sean dos planos $\delta_1: x+2y-z=4$; y $\delta_2: 2x+4y+az=3$. Determina el valor de a para que:

- a) Los planos sean paralelos
- b) Los planos sean perpendiculares

Sol: a) $a=-2$; b) $a=10$;

36.- Calcula la distancia y la perpendicular común entre las rectas: r: $\{x-y+1=0; x-y+z=0\}$ y s: $\{x-2y+9=0; x+z+1=0\}$

Sol: r' $\{ (x-1)/2=(y-2)/-2=(z-1)/1 \}$; $d=3$

37.- Halla el seno del ángulo que forma la recta r: $\{ (x-1)/2 = y/2 = z+3 \}$ con el plano p: $3x+4y+5=0$. Sol: $14/15$

38.- Halla la distancia del punto A(1,2,1) al plano p: $x+2y-2z+3=0$. Sol: 2

39.- Halla la distancia entre los planos: $\delta_1: 2x+y-2z-1=0$ y $\delta_2: 4x+2y-4z+4=0$. Sol: 1

40.- Halla la distancia entre la recta r: $\{(x-1)/-4=(y-1)/1=(z-1)/3\}$ y el plano p: $\{(-4t+4s, -2+t, 3+3t-3s)\}$. Sol: 3

41.- Calcula el volumen y área de las caras del tetraedro de vértices: A(1,2,1); B(3,2,2); C(2,3,0) y D(0,3,2). Sol: $V = 1$; $A_{ABC} = A_{ABD} = \frac{14}{2}$; $A_{ACD} = \frac{2}{2}$; $A_{BCD} = \frac{11}{2}$

42.- Halla la mínima distancia entre las rectas:

- a) r: $x/2 = (y-1)/-1 = (z+1)/0$ y s: $(x+1)/-4=(y-9)/2=(z-1)/0$

b) r: $(2t, 1, -1-3t)$ y s: $(3+2t, 7-t, 1)$.

Sol: a) 7; b) 7

43.- La recta con vector director $v(-2, 3, 1)$ y que pasa por el punto $P(-1, 5, 2)$ tiene un segmento comprendido entre los planos $\delta_1: \{x-y+z=0\}$ y $\delta_2: \{2x-y-z=7\}$. Determina sus extremos. Sol: $(1, 2, 1)$, $(3, -1, 0)$.

44.- Dado el plano $\delta: x+2y+3z=1$, determina el valor de a y b para que la recta r: $\{x/2=(y-1)/(a+1)=(z+1)/2b\}$ sea perpendicular al plano. Sol: $a=3$; $b=3$

45.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, -1)$ y es paralelo al plano dado por $2x+3y-z+1=0$. Sol: $2x+3y-z-3=0$

46.- Hallar la ecuación del plano determinado por las rectas: r: $x/1=(y+1)/2=(z-2)/1$ y s: $(x-2)/1=(y-6)/-1=(z-3)/2$. Sol: $5x-y-3z+5=0$

47.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-1, 1, 2)$ y es paralela a la recta r intersección de los planos: a: $x+y-2z+3=0$; b: $2x-y+z+1=0$. Sol: $\{x+y-2z+4=0; 2x-y+z+1=0\}$

48.- Escribir la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo a las rectas r: $(x-1)/2=(y-3)/3=(z-1)/1$ y s: $x/0=(y-1)/2=z/-1$. Sol: $5x-2y-4z=0$

49.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 1, 0)$ y es paralelo a las rectas r: $\{2x-y+z=0; x+y-z=2\}$; s: $\{y+z=3; x-y-z=1\}$. Sol: $x=1$

50.- Dados los puntos $A(1, 1, -1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(-1, 2, 1)$ y $D(1, 1, 1)$, hallar la ecuación del plano a que contiene a la recta que pasa por AB y es paralelo a la recta que pasa por CD. Sol: $2x+4y+z=5$

51.- Hallar la ecuación del plano q que pasa por el punto $A(0, 1, 1)$ y contiene a la recta: $\{x=1-\ddot{e}; y=3+\ddot{e}; z=4+2\ddot{e}\}$. Sol: $x-5y+3z+2=0$

52.- Determinar la posición relativa del plano a: $2x-y+z-3=0$ y la recta de ecuación r: $(x-1)/3=(y-2)/1=z/2$. Sol: Se cortan

53.- Determinar m y n para que los planos $2x+my-4z+1=0$ y $3x+9y+nz-3=0$ sean paralelos. Sol: $m=6$, $n=-6$

54.- Determinar m para que los planos $3x+my-z+3=0$ y $2x-y+mz-1=0$ sean perpendiculares. Sol: $m=3$

55.- ¿Pertenece el plano $4x-5y+z+1=0$ al haz determinado por la recta r: $\{x-3y+z-1=0; 2x+y-z+3=0\}$?. Sol: Sí

56.- Hallar el baricentro de los triángulos y tetraedros siguientes:

a) $A(1, 0, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(1, 1, 2)$ Sol: $(1, 1, 1)$

b) $A(2, 1, -2)$, $B(-1, 2, 0)$, $C(4, 3, 1)$, $D(3, -2, -3)$ Sol: $(2, 1, -1)$

c) $A(1, 2, -1)$, $B(2, 2, 1)$, $C(3, 2, 0)$ Sol: $(2, 2, 0)$

57.- Hallar las ecuaciones de los planos:

a) Pasa por $(2, 0, 3)$ y es paralelo al plano $(x, y, z) = (0, 1, 3) + t(2, 1, 1) + v(-1, 1, 0)$.

b) Pasa por $(1, 1, 0)$, $(3, 1, 4)$ y $(0, 2, -1)$

- c) Pasa por (2,1,2) siendo paralelo al plano $2x-3y-z+3=0$
 d) Pasa por (1,1,1) y (2,0,-1) siendo paralelo a la recta $(x-1)/2 = (y-2)/1 = (z+1)/3$
 Sol: a) $x+y-3z+7=0$; b) $2x+y-z=3$; c) $2x-3y-z+1=0$; d) $x+7y-3z=5$

58.- Ecuación de la recta que pasa por el punto (2,0,2) siendo paralela a la recta intersección de los planos: a: $x+y-z=0$ y b: $2x+2y-z=1$
 Sol: $(x-2)/1 = y/-1 = (z-2)/0$

59.- Plano que pasa por el (2,1,1) siendo paralelo al plano determinado por el punto (1,0,1) y la recta que pasa por (2,2,2) y tiene como vector director el (1,-1,3). Sol: $-7x+2y+3z+9=0$

60.- Ecuación de un plano que sea paralelo a las rectas r y s, y contenga al punto P(-1,0,2).
 r: $[x=1+3t, y=t, z=-2-t]$ s: $\{x+y-3=0, 2x-y+2z=1\}$
 Sol: $5x-7y+8z=11$

61.- Halla el punto de intersección de la recta r con el plano a:
 r: $\{x=2t; y=t-1; z=3t+1\}$ a: $x-y+z+2=0$ Sol: (-2,-2,-2)

62.- Estudia la posición relativa de las rectas:
 r: $\{x=t, y=-2t, z=1+t\}$ s: $\{x=-8, y=2-8, z=1\}$
 Sol: Se cruzan

63.- Se consideran las rectas:
 r: $\{x=t, y=1-4t, z=2-t\}$ s: $\{x=a, y=3-28, z=4-8\}$
 Determinar "a" para que las rectas se corten. Pueden ser iguales?. Sol: $a = 1/3$; No

64.- Comprobar si están alineados los puntos:
 (3,1,-2) (1,1,0) (1,0,1) (0,1,1) Sol: no

65.- Calcular la posición relativa de las rectas:
 $x+2y-z=0$ $x-z=0$
 $3x+y+z=4$ $2x-y-z=1$ Sol: se cortan en (1,0,1)

$x+y=0$ $x+y-z=1$
 $3x-2y=2$ $x+y+z=3$ Sol: se cruzan

66.- Dados $A=(1,0,-1)$ $B=(a,2,3)$ determinar el valor de a para que el plano $2x-y+z=3$ sea paralelo a la recta determinada por AB. Sol: $a=0$

67.- Dado el punto $A=(3,1,-1)$ y la recta r: $x-1 = y/2 = (z+1)/3$. Determinar el punto B de la recta r, de tal manera que AB sea paralela al plano $3x-2y+z=4$. Sol: (3,4,5)

68.- Calcula el producto vectorial de los vectores: $V=(2,-1,0)$ $W=(3,1,-1)$. Sol: (1,2,5)

69.- Siendo $a=(1,0,-1)$ $b=(1,1,1)$ $c=(1,2,-3)$. Calcular $a \cdot (b \cdot c)$, $(a \cdot b) \cdot c$. Sol: (4,4,4) (4,4,4)

70.- Hallar el volumen del paralelepípedo de aristas OA, OB, OC, siendo $OA=(1,0,1)$ $OB=(2,1,-1)$ $OC=(2,2,-1)$ Sol: $3 u^3$

71.- Hallar el volumen del tetraedro ABCD siendo $AB(1,4,2)$ $AC=(1,0,0)$ $AD=(2,1,-1)$. Sol: $1 u^3$

72.- Encontrar los valores de x para que el vector (x,1,2) sea ortogonal a (1,0,-1). Sol: $x=2$

- 73.-** Area del triángulo determinado por los puntos $A=(2,2,2)$ $B=(1,-1,0)$ $C=(0,1,2)$ Sol: $45/2$
%
- 74.-** Dados: $A=(2,2,1)$ $B=(1,-2,0)$ $C=(2,0,1)$ $D=(0,2,-2)$, demostrar que no son coplanarios y calcular el volumen del tetraedro que determinan. Sol: $1/3 u^3$
- 75.-** Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A=(1,3,-1)$ y $B=(4,2,-2)$ siendo perpendicular al plano $x+y-z+3=0$. Sol: $x+y+2z=2$
- 76.-** Hallar la distancia del punto $A=(0,0,1)$ a la recta r de ecuación: $(x,y,z) = (t,2t+1,2t-2)$ Sol: $\sqrt{74}/3$
- 77.-** Dada la recta $r: x/2 = y-2 = z+3$ y el plano $x+y=5$. Hallar el ángulo que forman, y el punto de intersección. Sol: $60^\circ; (2,3,-2)$
- 78.-** Calcular el ángulo que forman los planos: $x-3y+4z-1=0$, $2x+2y+z-3=0$. Sol: 90
- 79.-** Calcular la proyección ortogonal del punto $P=(0,-1,-1)$ sobre el plano $x+3y+2z=9$
Sol: $(1,2,1)$
- 80.-** Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A=(1,1,2)$ siendo perpendicular al plano $x+y-2z=3$ y paralelo a la recta $\{x-2y+z=0; x=1\}$ Sol: $4x-2y+z=4$
- 81.-** Hallar la ecuación del plano que pasando por el punto $A=(0,1,-2)$ tiene por vector director asociado $v=(1,-1,1)$. Sol: $x-y+z+3=0$
- 82.-** Hallar la ecuación de la recta que pasando por el punto $A(1,3,-2)$ es perpendicular al plano $x+y-z=3$ Sol: $(x-1)/1 = (y-3)/1 = (z+2)/-1$
- 83.-** Halla las ecuaciones implícitas de la recta proyección ortogonal de la recta $(x,y,z) = (0,1,-1) + \ddot{e} (1,0,2)$ sobre el plano $x - 2y + z = 0$. Sol: $x-2y+z=0; 4x+y-2z=3$
- 84.-** Sean $P(0,1,0)$, $Q(0,3,0)$, $R(1,1,2)$ y $S(1,3,2)$
a) Comprobar que son coplanarios.
b) Comprobar que PQRS forman un rectángulo. Sol: c) $2 \frac{5}{\%}$
c) Calcular el área de dicho rectángulo.
- 85.-** Hallar la distancia entre el punto $(2,0,3)$ y la intersección de los planos $\delta_1: x+z-1=0$ y $\delta_2: x+2y+z=3$. Sol: $d=3$
- 86.-** Halla el ángulo que forman los planos $x+2y-z+3=0$ y $3x-y+z=4$. Sol: $\delta/2$
- 87.-** Halla el plano que pasando por $P(1,1,1)$, sea perpendicular a los planos $x-y+z+3=0$ y $x+2z=1$. Sol: $2x+y-z=2$.
- 88.-** Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento AB pasando por el punto A siendo: $A(1,-1,0)$, $B(0,1,0)$. Sol: $x-2y-3=0$.
- 89.-** Halla el ángulo que forman el plano $3x+y-2z+7=0$ y la recta $\{x-2y-8=0; x+z+8=0\}$. Sol: $\hat{a} =$

78,5°

90.- Halla el simétrico del punto P (0,1,1) respecto al plano que pasa por los puntos: A(2,1,1), B(0,2,-1), C(1,-3,0). Sol:(2,1,-1).

91.- Dada la recta de ecuaciones $(x-1)/0 = (y+1)/1 = (z+4)/2$ y el punto P (1,2,2), halla el simétrico de dicho punto respecto de la recta. Sol: (1,0,-2)

92.- Distancia entre los planos paralelos $3x+4z-15=0$; $3x+4z+10=0$. Sol: 5

93.- Halla el plano que contiene a OY y dista 4 unidades del punto P(0,0,5). Sol: $\delta_1: 3x+4z=0$; $\delta_2: 3x-4z=0$

94.- Halla el plano que pasa por el (1,0,1), siendo el triángulo formado por las rectas en las que corta a los planos coordenados, equilátero. Sol: $x+y+z=2$

95.- Determina un punto de la recta $\{(x+1)/2=y/1=z/-1$ que equidiste de los planos $4x+3z+4=0$ y $2x+2y+z=2$. Sol: (1,1,-1)

96.- Halla la recta que pasando por el (3,2,1) sea perpendicular y secante a la recta $(x-1)/1 = (y-1)/-1 = z/-1$. Sol: $(x-3)/2=(y-2)/1=(z-1)/1$

97.- Halla el plano que contiene a la recta $(x-1)/2 = y/1 = (z-2)/-1$ siendo perpendicular al plano $2x-y+2=0$. Sol: $x+2y+4z=9$

98.- Halla el punto del plano $x+y+z=5$ que está sobre la recta que siendo perpendicular al plano A(2,2,1),B(1,0,0),C(0,1,2) pasa por el baricentro de dicho triángulo. Sol: (3,-1,3)

99.- Halla el área del triángulo de vértices los puntos de intersección del plano $3x+2y-3z=6$ con los ejes de coordenadas. Sol: $\sqrt{22}$

100.- Discutir, según los valores del parámetro a, la posición relativa de las siguientes rectas: $r: \{x-y=-1; 3y-z=6\}$ $s: \{x-ay+2a-1=0; 3x-az=3\}$. Sol: $a=1$ coincidentes; $a \neq 1$ se cortan

101.- Calcula la ecuación de la recta paralela a: $x = y/2 = -z$ que se apoya sobre las rectas: r determinada por los puntos: A(1,1,1) B(1,5,3); $s: \{x+z=1; 3x-y=3\}$. Sol: $(x-1)/1=(y+1)/2=z/-1$

102.- Considerando el plano $\delta: ax + 2z - 1 = 0$

a) Discútase, según valores del parámetro a, su posición relativa respecto al plano OXY.

b) Halla el valor o valores del parámetro a para que la recta normal al plano δ pasando por el origen forme con el plano OXY un ángulo igual a $\delta/2$.

Sol: a) $a=0$ paralelos, $a \neq 0$ se cortan; b) $a=0$

103.- Dada la recta $r: \{y=1; x+z+1=0\}$. Determinar la ecuación de un plano que contiene a la recta y está a una distancia 2 del punto P(1,1,1). Sol: $2x+y+2z=-1$

104.- Siendo A(2,1,1), B(0,2,4), C(0,1,1) y D(3,0,1) vértices de un paralelepípedo de aristas AB, AC y AD, calcular las coordenadas de los restantes vértices y su volumen. Sol: (-2,2,4),(1,1,4),(1,0,1),(-1,1,4); $V=6u^3$

105.- Volumen de la pirámide de vértice el punto $(1,0,-1)$ y base, el paralelogramo ABCD (B y C opuestos), siendo $A(1,1,0)$, $B(2,1,-2)$ y $C(0,2,0)$. Sol: $3u^3$

106.- Obtener el valor de a, para el cual los planos: $x+y-2=0$; $2x+y-z=0$; $ax+y-2z+2=0$ determinan una recta. Sol: $a=3$

107.- Determínese el ángulo $\hat{\alpha}$ que forma el plano $x+z=3$ con la recta $\{z=-1; x-y-1=0\}$. Sol: $\hat{\alpha}=30$

108.- Determinar la recta que, siendo perpendicular al plano $x+2y-z+1=0$ pasa por el punto $P(0,1,0)$. Entre los planos que contienen a r, determinar uno δ , que también contiene al punto $Q(1,0,1)$. Sol: a) $x/1=(y-1)/2=z/-1$; b) $x-2y-3z+2=0$

109.- Dados los planos: $x-y+z-2=0$; $2x-ay+2z=0$. a) Calcular su posición relativa para los valores del parámetro $a=2$, $a=-2$. b) Si para alguno de los mismos determinan una recta, obténgase la ecuación de la paralela a ésta, pasando por el punto $(1,1,1)$. Sol: a) $a=2$ planos paralelos; $a=-2$ se cortan en una recta; b) $a=-2$ δ r': $(x,y,z) = (1,1,1) + \ddot{e}(-1,0,1)$

110.- Halla el punto simétrico de $A(1,2,3)$ respecto al plano $y+z-3=0$. Sol: $(1,0,1)$

111.- Halla el punto simétrico de $(0,1,-1)$ respecto a la recta $\{y-1=0; x+z-3=0\}$. Sol: $(2,1,1)$

112.- Halla la perpendicular común a las rectas r: $(x-1)/1=(y-1)/0=z/-1$ y s: $\{x=0, z+1=0\}$. Halla también la distancia entre r y s. Sol: t: $\{y=1, x-z-1=0\}$. $d = \sqrt{2}$

113.- Halla la recta paralela al plano $x+y-z=0$ que corta a la recta $\{x+y+z=1, x-2y=0\}$ y pasa por el punto $(1,1,3)$. Sol: $x=y=(z-1)/2$

114.- Determinar un plano que, siendo perpendicular a la recta r definida por $x=t+1, y=-t+2, z=0$, pase por el punto $(0,1,2)$. Estudiar la posición de r, respecto al eje OZ. Sol: $x+y-1=0$. Se cortan, son perpendiculares.

115.- Determinar las condiciones que tienen que cumplir a y b, para que los planos $ax+y-z-2=0$, $z+2=0$, $x+3y+2z-3=0$ se corten en un punto. Sol: $b...2/a$

116.- Definición de producto vectorial en \mathbb{R}^3 . Calcular algún valor del parámetro a, para que el producto vectorial de $(1,2,a)$ y $(1,a,0)$, tenga la dirección del eje OZ. Sol: $a=0$

117.- Ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es paralelo a los vectores $u(1,0,1)$ y $v(2,1,-1)$. Sol: $-x+3y+z=3$

118.- Ecuación canónica del plano que corta a los ejes en los puntos $(2,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,1)$. Sol: $x/2+y/3+z=1$

119.- Ecuación del plano que pasa por el origen, por el punto en el que el eje OZ corta al plano $x+y-z=3$ y por el punto de intersección de las rectas: $\{x+y+z=3; 2x-y=1\}$ $\{6x-4y+z=3; -x+2y+3z=4\}$. Sol: $x-y=0$

120.- Ecuación del plano que pasa por $(1,0,1)$ y contiene a la recta $x-2y+z-1=0$; $x+y-2=0$. Sol: $2x-y+z=3$

121.- Ecuación del plano que contiene a la recta $(x-2)/1 = (y-1)/3 = z+1$ y al punto $A(0,1,0)$. Sol: $x-y+2z+1=0$

122.- Ecuación del plano paralelo a $x+2y-3z=0$ y pasa por $A(-1,2,0)$. Sol: $x+2y-3z-3=0$

123.- Plano que contiene a la recta $x+y-z=0$; $-2y+3z=3$ y es paralelo a $x-y+2z=5$. Sol: $x-y+2z=3$

124.- Dados los puntos $A(1,2,3)$, $B(3,a,1)$, hallar a para que la recta AB sea paralela al plano $x+y+z+1=0$. Sol: $a=2$

125.- Sea $r: \{2x-y+1=0; x+y-3z=-1\}$. Encontrar el valor de t , para que el plano de ecuación $tx+2y+z=k$ sea paralelo a r . ¿Para qué valor de k el plano contiene a r ? Sol: $t=-5$; $k=3$

126.- Ecuación de la recta que pasa por $(1,1,0)$ y es paralela a $(x+2)/1 = y/-1 = z/2$. Sol: $(x-1)/1=(y-1)/-1=z/2$

127.- Dados $A(1,1,-1)$, $B(1,2,3)$, $C(0,5,-1)$. Ecuación de la recta que pasa por C y es paralela a AB . Sol: $x/0=(y-5)/1=(z+1)/4$

128.- Recta que se apoya en dos rectas r y s y pasa por un punto P (el problema no tiene solución siempre, por ejemplo, si r y s son paralelas y P no pertenece a dicho plano). Ecuación de la recta que pasa por $P(0,1,2)$ y se apoya en las rectas $r: x/2 = (y-3)/1 = (z-1)/2$ y $s: 2x+y-z=0 \quad x-y+3z=2$. Sol: $\{5x-2y-4z=-10; 7x+2y=2\}$

129.- Recta que pasa por un punto, paralela a un plano y que se apoya en otra recta. Ecuación de la recta que pasa por $P(1,0,1)$, paralela al plano $2x+y-z=0$ y que se apoya en la recta $\{x+y-z=1, 2y-z=2\}$. Sol: $\{x-z=0; x+y-1=0\}$

130.- Recta que se apoya en dos rectas y es paralela a otra: Recta paralela a $x=y=-z$ que se apoya en las rectas $r: A(1,1,1)$, $B(0,1,2)$; $s: x+y-z-2=0 \quad 2x-y+z=4$. Sol: $\{x+z=2; 2x-y+z=4\}$

131.- Recta que pasa por un punto y es paralela a dos planos: Dados los planos $x+2y-z=0$, $x+y-3=0$, hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(1,0,-1)$ y es paralela a ambos. Sol: $(x-1)/1=y/-1=(z+1)/-1$

132.- Halla a y b para que los planos $\delta_1: 2x+ay+z-1=0$ y $\delta_2: bx-6y+2z=0$ sean paralelos. Sol: $a=-3$; $b=4$

133.- Calcular los valores de x e y para que $(x,y,2)$ sea ortogonal a los vectores $(1,-1,0)$ y $(2,0,-1)$. Sol: $x=y=1$

134.- Halla la recta paralela a $r:\{2x+y=0; 4x-z=0\}$ que se apoya en las rectas $s: \{x+y=2; 2x-y-z=0\}$ y $t:(x-1)/1=y/2=z-1$. Sol: $\{2x+y=2; 4x-z=3\}$

135.- Calcular los vectores de longitud 1, ortogonales a $(1,-1,1)$ y $(0,1,2)$. Sol: $(3/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, -1/\sqrt{14})$

136.- Halla el volumen del tetraedro de vértices $A(0,0,0)$, $B(0,1,1)$, $C(1,1,0)$ y $D(1,0,1)$ y calcula el área de una de sus caras. Sol: $V= 1/3 u^3$; $S=\sqrt{3}/2 u^2$

137.- Volumen del paralelepípedo determinado por: $u(1,1,-2)$, $v(2,1,1)$, $w(1,2,-2)$. Sol: $5 u^3$

138.- Angulo que forman las rectas $(x-1)/3 = y/2 = z/-1$; $x=3-t$, $y=2+t$, $z=1-t$. Sol: 90°

139.- Angulo que forman los planos: $-x+2y+z=1$, $x+y+2z-3=0$. Sol: 60

140.- Vector de dirección de la recta determinada por $x+y-2z=4$, $x+y-1=0$. Sol: $v=(1,-1,0)$

141.- Angulo que forma la recta $(x-1)/2 = y/1 = (z+1)/-1$ con el plano $x+2y+z=3$. Sol: 30

142.- Hallar a para que sean perpendiculares: $x=1-at$, $y=2+t$, $z=3-2t$; $x/3 = (y-1)/2 = z$. Sol: $a=0$

143.- Hallar a para que sean perpendiculares: $x+ay-z=1$, $-x+2y+z-3=0$. Sol: $a=1$

144.- Hallar a y b para que sean perpendiculares $(x-1)/2 = (y+1)/a = (z-1)/4$ $x+3y+bz=1$. Sol: $a=6$; $b=2$

145.- Ecuación de la recta que pasa por $(2,1,-1)$ y es perpendicular al plano $x-2y+3z-1=0$. Sol: $(x-2)/1=(y-1)/-2=(z+1)/3$

146.- Ecuación de la recta que pasa por $(1,-1,0)$ y es perpendicular al plano que pasa por dicho punto y contiene a la recta $x=1+2t$, $y=1-t$, $z=2+t$. Sol: $(x-1)/1=(y+1)/1=z/-1$

147.- Ecuación del plano que pasa por el punto $(2,1,-1)$ y es perpendicular a $r: \{x-y+z-3=0; x+y=2\}$. Sol: $-x+y+2z+3=0$

148.- Ecuación de la recta que pasa por $(1,3,2)$ y corta perpendicularmente a la recta: $(x-5)/3=(y-1)/1=(z-1)/0$. Sol: $\{3x+y-6=0; x+z-3=0\}$

149.- Recta perpendicular e incidente al eje OZ por el punto $(2,1,3)$. Sol: $\{x-2y=0; z=3\}$

150.- Dadas las rectas $r: x=2y=-z$ y s la que pasa por los puntos $(1,-1,1)$ y $(2,1,0)$, hallar la perpendicular a ambas trazada por el punto $(1,2,1)$. Sol: $(x,y,z)=(1,2,1)+\vec{e}(1,0,1)$

151.- Hallar la perpendicular común a las rectas:

a) $x=y=z$ y $(x-2)=(y-1)/0=(z+1)/-2$ (se cortan). Sol: $(x-1)/2=(y-1)/-3=(z-1)$

b) $r: x-1=y=(z-1)/0$ y $s: x-2=y-1=z+1$ Sol: $x-1=y=(z-1)/-2$

c) $r: x=2$, $y-z=0$; $s: x+2y+1=0$, $z=3$ Sol: $(x-2)=(y-1)/2=(z-1)/-2$

152.- Hallar la distancia entre $A(0,1,-1)$ y $B(2,4,5)$. Sol: 7

153.- Distancia del punto $(-2,-1,0)$

a) a la recta $\{x+3y+1=0, 4y-z+7=0\}$

b) al plano $3x+2y+6z-41=0$.

Sol: a) 5; b) 7

154.- Distancia entre los planos: $2x+2y-z=0$, $2x+2y-z-3=0$. Sol: 1

155.- Distancia entre las rectas:

a) $(x-1)/4 = y-2 = (z-1)/3$; $(x+1)/4 = y-1 = (z-2)/3$

- b) $(x-1)/2 = y = (z-2)/0$; $(x-1)/3 = y/2 = (z-2)/1$
 c) $(x-1)/1 = (y-1)/0 = z/3$; $(x-5)/2 = (y-3)/1 = (z-2)/1$
 d) r: $\{3x-y-4=0, z=2\}$; s: $\{x=-5, 2y+3z=17\}$

Sol: a) $\sqrt{5}$; b) 0; c) 0; d) 7

u²

156.- Area del polígono de vértices ABCD, siendo A(2,0,0), B(4,0,0), C(3,2,0), D(0,2,0). Sol: 5

157.- Volumen de la pirámide de base el polígono anterior y vértice V(0,0,3). Sol: $5 u^3$

158.- Halla la distancia del punto (1,0,-1) al plano $x-y-z=-1$. Sol: $\sqrt{3}$

159.- Ecuación del plano que pasa por el punto (0,0,1), es perpendicular al plano $x-y+z+3=0$ y es paralelo a la recta $x-y=0$ $x+z=0$. Sol: $y+z-1=0$

160.- Ecuación del plano que contiene a la recta $(x-3)/1 = (1-y)/2 = (z+1)/1$ y es perpendicular al plano $x-y+2z=0$. Sol: $3x+y-z=11$

161.- Ecuación del plano paralelo al plano $6x-3y+2z+1=0$ a una distancia de 2 unidades. Sol: $6x-3y+2z=13$; $6x-3y+2z+15=0$

162.- Halla la distancia del punto (1,0,-1) a la recta $\{x-z=2, y=0\}$. Sol: 0

163.- Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos (1,-1,2), (1,1,0). Sol: $y-z+1=0$

164.- Hallar las coordenadas del simétrico del punto (0,1,2) respecto: a) del origen. b) del plano $x-3z-4=0$ c) de la recta $x-3 = y-4 = z-2$. Sol: a) (0,-1,-2); b) (2,1,-4); c) (2,3,-2)

165.- Ecuación del plano que pasa por (-2,1,3), siendo el triángulo formado por las rectas en que corta a los ejes coordenados equilátero. Sol: $x+y+z=2$

166.- Ecuación del plano que pasa por los puntos A(1,0,2) y B(0,3,-2) y es paralelo a la recta $x/2 = (y-1)/3 = (z+1)/1$. Sol: $15x-7y-9z+3=0$

167.- Hallar a para que sean coplanarias: $x-1 = (y+1)/2 = z/3$; $(x+1)/3 = y = (z-2)/a$. Ecuación del plano que determinan. Sol: $a=1$; $x-8y+5z=9$

168.- Hallar la proyección de la recta s: $x/-2 = y = (z-1)/3$ sobre el plano $x-y+2z-3=0$. Sol: $\{5x+7y+z-1=0; x-y+2z-3=0\}$

169.- Dadas las rectas r: $(x-3)/3 = (y-2)/1 = (z-a)/-1$; s: $(x-2)/-2 = y = z/3$

a) Hallar a para que sean secantes.

b) Hallar para ese valor de a, la ecuación del plano que determinan.

c) Hallar la proyección de la recta t: $x/2 = y = z/-1$ sobre el plano anterior.

Sol: a) $a=2$; b) $4x-7y+5z-8=0$; c) $\{4x-7y+5z-8=0, x+7y+9z=0\}$

170.- Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (-1,1,0) y es paralela al plano $2x-y+z=3$ y al determinado por los puntos (3,0,0), (0,-1,0), (0,0,2). Sol: $(x+1)/-3=(y-1)/4=z/10$

171.- Hallar la ecuación del plano que pasa por (0,3,3), (0,-1,1) y (1,0,1). Sol: $x-y+2z=3$

172.- Discutir, según los valores de a la posición relativa de los planos: $3x+y-z=0$, $2x+z=1$, $-x+ay-3z=-2$.

Sol: $a=1$ se cortan en una recta; $a \neq 1$ se cortan en un punto

173.- Obtener las ecuaciones de los planos que son perpendiculares a la recta $r: x-y+1=0$, $y-2z=3$ y distan 3 unidades del punto (1,1,1). Calcular el seno del ángulo que formado por r y el plano coordenado OXY.

Sol: $2x+2y+z+4=0$; $2x+2y+z-14=0$; $\text{sen} \hat{\alpha} = 1/3$

174.- Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por (1,0,1) y es perpendicular al plano que conteniendo a la recta $(x-1)/1 = y/3 = (z+1)/1$ corta al eje OX en el punto de abscisa 2. Sol: $(x-1)/1 = y/0 = (z-1)/-1$

175.- Halla la ecuación del plano que pasa por (1,0,1) y es paralelo al plano $x-y=2$. Sol: $x-y=1$

176.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por (1,0,1) y es perpendicular al plano $x+y-1=0$. Sol: $\{z=1, x-y=1\}$

177.- Hallar el ángulo que forman las rectas $r: \{x+2y-z=7, x+y=4\}$ y $s: x = (y-1)/-2 = z/3$. Sol: 90°

178.- Hallar el ángulo que forman los planos $\delta_1: 2x-y+z=0$ y $\delta_2: x-y-z=1$. Sol: $61,8^\circ$

179.- Hallar el ángulo que forman la recta $r: \{x+y+z=4, x+z=2\}$ y el plano $x+y=3$. Sol: 30°

180.- Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por (-1,2,4) y corta a las rectas $r: (x+2)/3 = y+1 = z+1$ y $s: (x+2)/1 = (y+1)/1 = (z-2)/0$. Sol: $(x+1)/-1 = (y-2)/1 = (z-4)/2$

181.- Comprobar si los puntos (1,0,-1), (2,1,0), (3,2,1), (0,-1,-2) están alineados. Sol: sí

182.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,1,1) y es paralela a los planos $\delta_1: 2x-y-z+3=0$ y $\delta_2: -y+z=3$. Sol: $x-1 = y-1 = z-1$

183.- Halla el punto de corte de la recta $\{x-y=1, y-z=1\}$ y el plano $\delta: 2x-y-1=0$. Sol: (1,1,1)

184.- Halla las coordenadas del punto B sabiendo que A(1,2,1) y AB(2,0,-1). Sol: (3,2,0)

185.- Halla el punto medio de A(1,0,1) y B(3,2,-1). Sol: (2,1,0).

186.- Halla los puntos que dividen al segmento en 3 partes iguales, siendo A(0,1,-1) y B(3,1,2). Sol: (1,1,0), (2,1,1)

187.- Los puntos A(1,-1,0), B(0,1,2) y C(3,-1,1) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla el vértice D. Sol: D(4,-3,-1)

188.- Halla el baricentro del triángulo ABC, siendo A(1,-1,0), B(1,1,1) y C(1,0,2). Sol: (1,0,1)

189.- Halla el baricentro del tetraedro de vértices (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1) y (1,1,0). Sol: (1/2, 1/2, 1/2)

190.- Los puntos medios de los lados de un triángulo son $(2,1,1)$, $(1,1,1)$ y $(1,0,2)$. Halla los vértices. Sol: $(2,0,2)$, $(2,2,0)$, $(0,0,2)$.

191.- Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(1,1,0)$ y $B(1,0,-1)$. Comprobar si el punto $(1,4,3)$ pertenece a esta recta. Sol: $\{y-z=1, x=1\}$, sí pertenece.

192.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0,-1,1)$ y lleva la dirección del vector $(0,3,1)$. Sol: $\{x=0, y-3z+4=0\}$

193.- Halla la ecuación del plano que pasa por $A(1,1,1)$, $B(1,2,2)$ y $(-1,2,0)$. Sol: $x+y-z=1$

194.- Halla la ecuación del plano que pasa por $A(1,1,1)$ y tiene por vectores directores $v(1,0,1)$ y $w(0,1,-1)$. Sol: $x-y-z+1=0$

195.- Halla la ecuación del plano que contiene al punto $(1,-1,0)$ y tiene por vector asociado normal el $(1,0,-1)$. Sol: $x-z=1$

196.- Halla la ecuación segmentaria del plano que contiene a los puntos $(0,2,0)$, $(1,0,0)$ y $(0,0,5)$. Sol: $x/1+y/2+z/5=1$

197.- Comprueba si los puntos $(0,0,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(2,2,1)$ y $(3,1,1)$ son coplanarios. Sol: sí

198.- Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $x=2+t$, $y=1$, $z=-t$ y al punto $(3,0,-1)$. Sol: $x+z=2$

199.- Determina la ecuación de la recta que:

a) Está contenida en los planos $\delta_1: x-2y+z=0$ y $\delta_2: 2x-y+z=1$

b) Contiene al punto $(3,1,3)$ y es paralela a los planos $\delta_1: x-2y+z=0$ y $\delta_2: 2x-y=0$

c) Pasa por los puntos de corte del plano $x-y=3$ con los ejes de coordenadas.

Sol: a) $\{x-2y+z=0, 2x-y+z=1\}$; b) $\{x-2y+z=4, 2x-y=5\}$; c) $\{x-y=3, z=0\}$

200.- Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A=(3,2,-1)$ y $B=(4,0,2)$ siendo perpendicular al plano $x-5y-2z-6=0$. Sol: $11x+y-3z-38=0$