GEOMETRIA

1. Ecuación de la recta que pasa por (1,0,1) y es paralela al plano 2x-3y+z=1 y al determinado por los puntos (2,0,0), (0,3,0) y (0,0,1).

2. Volumen del tetraedro de vértices (1,0,1) y los puntos en que el plano: 2x+6y-4z-12=0 corta a los ejes.

3. Halla el punto de intersección del plano 3x+2y-11z+4 = 0 y la recta:

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= t \end{aligned}$$

4. Ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas, corta a la recta x = 2t +3, y = -t - 2; z = - 1 y es paralela al plano x+y+z = 1.

5. Halla k para que r y r' sean paralelas.

$$r \quad \begin{aligned} x+y+2z-3 &= 0 \\ x-3y+4z &= 0 \end{aligned}$$

$$r' \quad \begin{aligned} x+y+2kz-4 &= 0 \\ 2x+8y+kz+9 &= 0 \end{aligned}$$

6. Vector unitario y paralelo a r:

$$\begin{aligned} x+y-z+1 &= 0 \\ -x-y+3z &= 0 \end{aligned}$$

7. Ecuación de la recta situada en el plano x+2y+z-2 = 0 incidente con P(1,1,-1) y perpendicular a r:

$$\begin{aligned} x &= 2z - 1 \\ y &= z + 2 \end{aligned}$$

8. Ecuación de la recta que pasa por (1,0,0) y corta a r y a r':

$$r: \ \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{-2} \qquad r': \ \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-8}{2}$$

SOLUCIONES:

1.- (x-1)/20 = y/9 = (z-1)/-13
2.- V = 7 u^3
3.- (4,3,2)
4.- (x,y,z) = (0,0,0) + λ (3,-2,-1)
5.- k = 1
6.- $1/\sqrt{2}$ (1,-1,0)
7.- (x,y,z) = (1,1,-1) + λ (1,1,-3)
8.- x=1; 3y-2z=0

GEOMETRIA

Cuestiones:

a) Producto vectorial. Propiedades.
b) Distancia de punto a plano, deduce la fórmula.

Problemas:

1.- Halla la recta que pasa por el punto A(1,2,2) y es perpendicular al plano determinado por las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2y \\ y = -z + 3 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = z - 2$$

2.- Ecuación do plano que pasa por (1,0,1) é perpendicular ó plano ð e paralelo á recta r:

$$\boldsymbol{p} \equiv x + y + 2z + 2 = 0 \qquad r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3}$$

3.- Halla el volumen de la pirámide de vértices el punto V(4,1,1) y base el triángulo A(1,1,3); B(1,0,0); C(1,3,0)

4.- Halla el punto simétrico de A(1,2,0) respecto del plano x+y+z-6 = 0

5.- Ecuación de la recta que pasa por P(1,1,1) y es paralela al plano x+y+3z = 0 y se apoya en la recta:

$$\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIONES:

1.- (x,y,z) = (1,2,2) + ë (1,-2,0)
2.- (x,y,z) = (1,0,1) + á (1,1,3) + â (1,1,2)
3.- 9/2 u^3
4.- (3,4,2)
5.- x+y=2; z=1

GEOMETRIA

1.- Definición de producto mixto de 3 vectores. Propiedades. Interpretación geométrica. Distancia de un punto a un plano. Demostración.

2.- Dados los planos:

$$p_1 \equiv x + y + az = -1$$

$$p_2 \equiv 2x + ay + z = a$$

$$p_3 \equiv x + y - z = 3$$

a) Estudiar según los valores de a la posición de los 3 planos.
b) En el caso de que determinen una recta calcular el ángulo que forman ð$_1$ y ð$_3$.

3.- Ecuación del plano perpendicular al plano x+y+3z = 1 y contiene a los puntos P(0,-2,0) y Q(2,-2,1).
Área del triángulo que determina dicho plano al cortar a los ejes de coordenadas.

4.- Hallar la ecuación de los planos paralelos a 2x-y+2z=0 que distan 2 unidades del punto P simétrico de (1,1,-1) respecto al plano z-1 = 0.

SOLUCIONES:

2.- a) a=2 Se cortan en una recta
a=-1 ð$_1$ y ð$_3$ son paralelos y ð$_2$ los corta
a...-1 y a...2 se cortan en un punto
b) 90º

3.- x+5y-2z+10=0; A = 5 33u^2

4.- 2x-y+2z-1=0; 2x-y+2z‰+11=0

GEOMETRIA

1.- Producto vectorial de vectores: concepto e interpretación geométrica.

2.- Determinar el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

3.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,2,1) y que corta perpendicularmente a la recta $\frac{x-4}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$

4.- Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta y = 1; 2x + z = 2 y que dista una unidad del punto (1,2,-1).

5.- Hallar el volumen del tetraedro que determina el plano 2x+3y+2z = 6 con los ejes coordenados.

SOLUCIONES:

2.- x-y+1=0

3.-

4.- 2x-2y+z=0
5.- 9 u^3

GEOMETRIA

1.- a) Distancia de un punto a una recta: concepto y deducción de la fórmula.
b) Producto mixto de vectores: concepto e interpretación geométrica.

2.- a) Determinar el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s:

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,2,1) y que corta perpendicularmente a la recta 8

3.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,1,0) y además se apoya en las rectas r y s:

4.- a) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta z = 0; x = y y que dista dos unidades del punto (1,2,1).
b) Hallar el volumen del tetraedro que determina el plano 3x+4y+6z=12 con los ejes de coordenadas.

6.- Determinar "a" para que las rectas r y s estén situadas en un mismo plano y hallar la ecuación de este plano.

Soluciones:

2.- a) 3x-5y-z+3=0; b) (x-2)/1 = (y-2)/-1 = (z-1)/1
3.- {x+z=2; y=1}
4.- a) Imposible, d(P,r)<2; b) 4 u^3
5.- a = -1 6 7x+y-z=14

GEOMETRÍA

1.- a) Define el producto escalar de dos vectores. Interpretación geométrica. Enuncia las propiedades.

b) Dado el plano Ax+By+Cz+D=0 con vectores directores u y v ¿Qué ángulo forman los vectores w=(A,B,C) y el producto vectorial de u y v?

c) Dados 4 puntos de ú^3 ¿Qué condición deben cumplir para que estén en el mismo plano.

2.- Distancia de un punto a un plano. Demostración.

a) Halla la distancia del punto P(-1,1,0) al plano que contiene a los puntos Q(1,1,2), R(3,0,0) y S(-1,-2,0).

b) Hallar el volumen de la pirámide de vértices los puntos Q, R, S y P.

3.- Discutir según los valores de "a" las posiciones relativas del plano 2x+ay+z=1 y la recta r: {x+y-az=3; x-y+z=a-1}

4.- a) Halla la ecuación de la recta que pasa por P(1,1,-2) y es paralela a los planos ð:x-2y+2z+1=0; ð':x+3y-2z-4=0.

b) Halla la ecuación del plano que contiene al eje OX y dista 8 unidades del punto (0,10,0)

5.- a) Halla el ángulo que forman el eje OZ con el plano que pasa por el punto (1,0,1) y es perpendicular a la recta {x=t, y=1, z=3+t}

b) Dada la recta y el plano x-y-z=0. Halla la ecuación de la proyección de la recta dada sobre el plano.

6.- Halla la ecuación del plano que pasa por A(0,1,1), es perpendicular al plano x+y-2z+1=0 y paralelo a la recta {x-2y=0; y+z=0}

<u>Soluciones:</u>

2. a) d=2; b) V=4 u^3
3. a=0 ó a=-3 paralelos; a...0 y a...-3 se cortan
4. a) ; b) 4y+3z=0
5. a) 45 ; b) {x-y-z=0, x-2y+3z+5=0}
6. 3x-5y-z+6=0

GEOMETRÍA

1.- a) Distancia de un punto a una recta.
b) Producto mixto. Propiedades.

2.- Dada la recta r, determinada por los puntos A(2,1,3) y B(3,4,6). Calcular los puntos de r tales que su distancia al punto C(3,0,1) es de 3 unidades. Calcular la distancia del punto C a la recta r.

3.- Dados los puntos A(2,0,0), B(0,0,0), C(0,1,0) y D(1,1,1). Determina el ángulo formado por el plano que pasa por los puntos A, B y C y la recta que pasa por C y D.

4.- a) Ecuación de los planos paralelos al plano determinado por A(1,0,2) y la recta

a la distancia de 3 unidades.

b) Simétrico del punto (2,3,1) respecto de la recta anterior.

<u>Soluciones:</u>

2. (1,-2,0), (40/19,25/19,63/19)
3. 45º
4. a) ð$_1$: -2x+y+2z+7=0; ð$_2$: -2x+y+2z-11=0; b) (0,5,-1)

GEOMETRÍA

- Teoría: Distancia de un punto a una recta

- Problemas:

1.- Calcular el volumen del tetraedro que tiene por vértices los puntos de intersección del plano ð:2x+y-3z=6 con los ejes coordenados y el origen de coordenadas.

2.- a) Punto simétrico del A(2,0,3) respecto al plano 2x-y+z=1.
b) Punto simétrico del A(2,0,3) respecto a la recta x=t; y=2-t; z=2-t.

3.- Posición relativa de los planos:

á) 2x-y+3z=1
â) x+2y-z=-b
ã) x+ay-6z=-10

4.- Determinar la perpendicular común a r y s:

Soluciones:

1.- 6 u^3
2.- a) (-2,2,1); b) (0,2,-1)
3.- a=7 y b=3 Se cortan en una recta
a=7 y b...3 Se cortan dos a dos
a...7 Se cortan en un punto

4.-

GEOMETRÍA

TEORÍA:

a) Producto escalar. Definición, propiedades e interpretación geométrica.
b) Distancia de un punto a un plano. Deduce la fórmula.

PRÁCTICA:

1. Sea el plano ð/x+2y-2z=3. Se pide:
a) Encuentra la ecuación del plano paralelo a ð y cuya distancia al origen sea 3.
b) Halla el punto P del plano ð más próximo al origen.

2. Estudia, según los valores del parámetro "a" la posición relativa del plano ð y la recta r:

ð / x+ay-z=0 r / 2x+y-az=2
x-y-z=a

3. Halla la distancia entre las rectas r y s y la ecuación de la perpendicular común a las mismas:

Soluciones:

1. a) ð$_1$:x+2y-2z=9, ð$_2$: x+2y-2z=-9; b) (1/3,2/3,-2/3)
2. a=2 la recta está contenida en el plano; a=-1 paralelos; a…2 y a…-1 se cortan

3. d=3;

GEOMETRÍA

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,0,-1), es paralela al plano $x+y-z=0$ e es perpendicular a la recta de intersección de los planos $3x+z=1$ y $x+4y+z=-2$.

2. Consideramos las rectas de ecuaciones

Se pide:

a) Halla n para que r y s sean paralelas. ¿Y para que sean perpendiculares?
b) Para el valor de $n=2$ determina la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3. a) Producto vectorial de dos vectores. Propiedades.
   b) Distancia entre rectas

4. Dada la pirámide de vértice V(4,3,-1) y base el paralelogramo ABCD, siendo A(1,1,-1), B(2,0,-1), C(3,1,-3) y D(2,2,-3). Halla el volumen de la pirámide

5. Ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,0,2) y que se apoya en las rectas:

<u>Soluciones:</u>

1.

2. a) $n=2$; $n=-1$; b) $5x+2y-7z=1$
4. $V=10/3$
5. r': $\{x+z-1=0,\ 3x-2y+z+1=0\}$

GEOMETRÍA

1.- Producto vectorial. Propiedades. Expresión analítica. Área del triángulo.

2.- Hallar las coordenadas del punto simétrico del punto A(1,2,0) respecto:
a) del punto (1,0,-2)

b) de la recta

c) del plano y-z+2=0

3.- a) Distancia de un punto a un plano. Demostración.
b) Ángulo que forma la recta {x-2=0; y-z=0} y el plano y+z-1=0

4.- Dadas las rectas Calcular:

a) Perpendicular común
b) Distancia entre ellas

5.- a) Ecuación de los planos que contienen a la recta

b) Plano que contiene a la recta anterior y dista 3 unidades del punto (1,1,0)

<u>Soluciones:</u>

2.- a) (1,-2,-4); (-1,2,2); (1,-2,4)
3.- 90º

4.- a) ; b) 5

5.- a) 2x+(3ë-1)y-2ëz=1+5ë; b) No existe ese plano

GEOMETRÍA

1.- Producto vectorial de vectores. Interpretación geométrica. Aplicaciones.

2.- Determina los valores de a y b en los planos:
ð$_1$: 2x-y+3z-2=0; ð$_2$: x-2y+z+b=0; ð$_3$: 3x+ay+5z-3=0
a) para que tengan un punto en común
b) para que pasen por una recta
c) para que se corten dos a dos en tres paralelas distintas

3.- Ecuaciones de la recta que pasa por P(1,2,1) y corta perpendicularmente a la recta:

4.- Dadas las rectas Hallar:

a) Posición relativa
b) Distancia entre ellas

5.- a) Ángulo entre recta y plano. Perpendicularidad de recta y plano.
b) Calcula el simétrico de P(1,0,1) respecto al plano x-y-z+3=0

<u>Soluciones</u>:

2.- a) a…0; b) a=0 y b=-1; c) a=0 y b…-1

3.-

4.- a) Se cruzan; b) 2 2
5.- b) (-1,2,3) %

GEOMETRÍA

1.- a) Distancia de un punto a un plano. Demostración.
b) Producto vectorial y mixto (Definición o interpretación geometría de ambos)

2.- Estudiar según "a" la posición de los siguientes planos

3.- a) Discutir según "a" la posición de las rectas:

4.- a) Hallar el simétrico del punto (2,1,4) respecto al plano x-y+2z-3=0.
b) Ecuación del plano paralelo al plano 2x+y+z+1=0 a la distancia de 6 unidades
%

5.- Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta por el punto (1,0,1) cortándola.

<u>Soluciones:</u>

2. a=1 coincidentes; a=-2 se cortan dos a dos; a...1 y a...-2 se cortan en un punto
3. a=-3 se cortan; a...-3 se cruzan
4. a) (0,3,0); b) ð$_1$:2x+y+z=5, ð$_2$: 2x+y+z=-7
5. (x-1)/-1=y=(z-1)/2

GEOMETRÍA

1.- A) Definición de producto escalar, expresión analítica en una base ortonormal e interpretación geométrica.

Siendo u=(1,2,1), escribir razonadamente un vector ortogonal a u que sea unitario.

B) Definición de producto vectorial, expresión analítica e interpretación geométrica.

2.- Escribir <u>razonadamente</u>:

2-1 Las ecuaciones de dos rectas paralelas.
2-2 Las ecuaciones de dos rectas que se cortan.
2-3 Las ecuaciones de dos rectas que se cruzan.
2-4 La ecuación de una recta y un plano paralelos.
2-5 La ecuación de una recta y un plano perpendiculares entre si.
2-6 Las ecuaciones de dos planos perpendiculares.
2-7 La ecuación de un plano perpendicular al eje OX.
2-8 La ecuación de un plano que contenga al eje OZ.

3.- Ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta x=1-ë y=4-ë z=-1+2ë y que pasa por el punto en el que el plano OXY corta a la recta r:

Ángulo que forma la recta r del apartado anterior, con el plano x-y-1=0

4.- a) Ecuaciones de los planos paralelos a 2x-y+2z-4=0 a una distancia de 2 unidades.

b)Simétrico del punto A(1,1,1), respecto al plano x-y-2z-4=0

Area del triángulo que forman A, su simétrico y el punto (3,1,2).

5.- Estudiar la posición de los planos, según el valor del parámetro:

Si para algún valor de a, determinan una recta, hállense sus ecuaciones paramétricas.

<u>Soluciones</u>:

3. x+1 = y-2 = z
4. a) ð$_1$: 2x-y+2z-10=0; ð$_2$: 2x-y+2z+2=0; b) (3,-1,-3)
5. a=2 se cortan en una recta; a...2 se cortan en un punto.

GEOMETRÍA

1.- a) Distancia de un punto a un plano. Demostración.

b) Define producto vectorial. Módulo, dirección y sentido (sin demostración). Interpretación geométrica. Demostración.

2.- a) Determinar m y n para que los planos de ecuación:

$$x-y+2z = 1$$
$$x+y+z = 1$$
$$3x-y+mz = n$$

se corten en una recta r.

b) Ecuación del plano que contiene a r y pasa por el punto P(2,1,1).

3.- a) Hallar la distancia del punto P(1,2,3) a la recta 2x+3y=21; z=-3

b) Ángulo de la recta r del apartado A con el plano OXY

4.- a) Hallar un punto de la recta r: x-2 = (y+1)/2 = (z-2)/-2 que equidiste de los puntos A(4,0,-1) y B(2,2,1).

b) Hallar las ecuaciones de los planos que contienen al eje OY y distan % del punto (2,0,1).

5.- a) Posición del eje OZ y la recta que pasa por los puntos A(2,2,-1), y B(1,1,1).

b)Distancia entre las dos rectas del apartado anterior.

<u>Soluciones:</u>

2. a) m=5; n=3; b) x-5y+4z-1=0
3. a) d=7; b) á=0º
4. a) (3,1,0); b) ð$_1$: x-y=0; ð$_2$: x+y=0
5. a) se cortan; b) d=0

GEOMETRÍA

1.- a) Define producto escalar ordinario. Interpretación geométrica.
b) Define producto vectorial. Módulo, dirección y sentido. Interpretación geométrica.
c) Define producto mixto. Interpretación geométrica.
d) Distancia de un punto a una recta.

2.- a) Posición de los tres planos, según los valores de a:

$$x+ay+z=a-1$$
$$x-2z+1=0$$
$$ax+2y-z=0$$

b) Hallar el valor de a, para que el ángulo que determina la recta
r: $x=1+t$; $y=1$; $z=1+t$ con el plano $ax-ay+2z=3$ sea de 60

3.- a) Hallar un punto de la recta r: $x+y+2z=1$; $2x-y-3z=2$ que junto con A(1,5,1) y B(1,6,-4), determine un triángulo rectángulo en A.
b) Hallar el área del triángulo del apartado anterior.

4.- a) Ecuación del plano que contiene a la recta

y es perpendicular al plano OYZ.
b) Ecuación del plano paralelo al plano $4x+3y-1=0$ a la distancia 2 unidades.

5.- a) Hallar a, para que el plano que pasa por A(a,a,1) y es perpendicular a la recta r: $y-2z=3$; $2x-y-2z=1$ diste del origen 3 unidades.
b1) Escribir la ecuación de un plano que contenga a la recta r del apartado anterior. Razonar la respuesta.
b2) Escribir la ecuación de un plano paralelo a la recta r del apartado anterior. Razonar la respuesta.

<u>Soluciones</u>:

2. a) a=2 se cortan en una recta; a=-3/2 se cortan dos a dos; a...2 y a...-3/2 se cortan en un punto. b) a=1
3. a) (1,0,0); b) A = 13 u^2
4. a) $y+2z-3=0$; b) ð$_1$: $4x+3y-11=0$; ð$_2$: $4x+3y+9=0$
5. a) a=2

GEOMETRÍA

1.- Sea r la recta que pasa por el punto A(0,2,0) y tiene como vector director v=(1,1,1).
a) Hallar el punto P de la recta r que esté más cerca del punto B(2,3,0)
b) Hallar los puntos de r que disten 3 unidades del punto Q(-4,1,-1)

2.- Dadas las rectas de ecuaciones:

a) Comprobar que son paralelas
b) Determinar la distancia entre ellas
c) Encontrar la ecuación de un plano perpendicular a ellas y que pase por A(2,-1,1)

3.- Interpretaciones geométricas, razonadas, de los tres productos de vectores.

4.- Determina la posición relativa de las rectas r y s, así como el ángulo que forman.

b) Hallar el volumen que forman el plano x+2y-3z-6=0 con los ejes de coordenadas.

Solución:

1.- a) (1,3,1); b) (-1,1,-1), (-3,-1,-3)
2.- b) 3; c) x+2y+2z-2=0
4.- a) Se cruzan; 30º; b) 6 u^3

GEOMETRÍA

1.- a) Definición de producto vectorial. Expresión analítica. Interpretación geométrica.
b) Definición de producto mixto. Expresión analítica. Interpretación geométrica.

2.- a) Pon un ejemplo de un vector ortogonal a v(1,0,1) y que tenga de módulo la unidad.
b) Encuentra los vectores unitarios que son perpendiculares a v(1,0,1) y forman un ángulo de 60 con w(1,1,1)

3.- a) Estudia, según los valores de a, la posición relativa de los planos:

b) Si en algún caso determina una recta, escribe las ecuaciones paramétricas.

4.- a) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta

y es perpendicular a ð: y-z-5=0
b) Calcula el ángulo que forma ð con el eje OY.

5.- Halla el punto P' simétrico del punto P(2,2,1) respecto de la recta

6.- Halla los puntos de la recta r: {x=2ë; y=2ë; z=ë} cuya distancia al origen de coordenadas sea igual a la distancia al plano 2x+2y-z+2=0

<u>Soluciones:</u>

2. a) "(1/ 2,0,-1/ 2); b) (2/4," 3/2, 2/4)
3. a) a=3 % se cortan % en una % recta, a % 3 se % cortan en un punto; b) x=3-ë, y=ë, z=-ë
4. a) x-y-z=0; b) 45º
5. P'=(6,4,-5)
6. P=(2,2,1)

GEOMETRÍA

1.- a) Producto escalar. Definición, interpretación geométrica y expresión analítica.

b)Producto vectorial. Definición (módulo, dirección y sentido), interpretación geométrica, expresión analítica.

2.- a) Demuestra que si a y b son dos vectores no nulos tales que |a| = 2|b| entonces los vectores a+2b y a-2b son ortogonales.

b) La ecuación Ax+By+Cz+D=0 representa a planos. Explica qué características tiene ese plano en cada uno de estos casos: i) A=0; C=0; ii) D=0

3.- Estudia según los valores de p la posición relativa de las rectas:

4.- a) Halla los puntos de la recta que equidistan de los planos ð: x+y+z+3=0 y ð': x-y+z+5=0

b) Calcula el perímetro del triángulo determinado por los puntos de intersección de ð con los ejes de coordenadas.

5.- Hallar las ecuaciones paramétricas de la proyección de la recta sobre el plano ð: x-2y-3z+1=0

Soluciones:

3. p=-1 paralelas; p=1 se cortan; p…"1 se cruzan

4. a) (1,1,0), (-2/3,8/3,-10/3); b) P = 9 2 %

5. x=1-5ë, y=1-4ë, z=ë

Geometría

1.- Dado el plano ð: $x+y+1=0$ y el punto $P(1,2,0)$.

a) Ecuación cartesiana del plano que pasa por P y es paralelo a ð.

b) Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a ð.

c) Ángulo que forma el plano dado con el eje OY.

2.- Ecuación del plano que contiene a la recta r: $x-y+1=0$; $x+2y+z=1$ y es perpendicular al plano $x+y-z+1=0$

3.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3,1,-2)$ y es paralela a los planos $x-2y-z+5=0$, $x+y-z+4=0$.

4.- Discutir la posición de los planos.

$$x-y+2z=1$$
$$kx-2y+2kz=0$$
$$(k-1)x+y=1$$

5.- Producto vectorial.

6.- a) Es posible que el producto mixto de tres vectores no nulos es cero.

b) Puede ser una recta perpendicular a una recta contenida en el plano y no ser perpendicular a dicho plano.

<u>Soluciones:</u>

1. a) $x+y-3=0$; b) $x-1=y-2=z/0$; c) 45º

2. $x-y+1=0$

3. $\{x-2y-z-3=0,\ x+y-z-6=0\}$

4. k=2 dos planos paralelos y el otro los corta; k=1 se cortan en una recta; k...1 y k...2 se cortan en un punto.

6. a) Sí; b) Sí

Geometría

1.- a) Distancia de un punto a un plano (definición y demostración)
b) Sabiendo que a.b = |a|.|b|.cos(a,b) y que a...0 y b...0. Demostrar que (ëa).b=ë(a.b).

2.- Halla el volumen del tetraedro que tiene como vértices los puntos de corte del plano x-y+2z=6 con los ejes de coordenadas y el origen.

3.- Ecuación de la recta que pasa por A(1,0,3) y corta perpendicularmente a la recta s: {x-z=2; y-4z=5}

4.- Estudia la posición de la recta r: {x-y+z=1; 2x-y+z=-2} y el plano ax-2y+(a-1)z=b en función de a y b.

5.- Halla la distancia entre las rectas:

<u>Soluciones:</u>

2. V=18 u^3
3. (x-1)/0 = y/-1 = (z-3)/4
4. a=3 y b=-1 la recta está en el plano; a=3 y b...-1 paralelos; a...3 se cortan
5. d=3

Geometría

1.- a) Producto escalar. Definición, interpretación geométrica y propiedades.

b) ¿Qué representa en el espacio un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas y que rg(A)=2?

¿Qué significa que dos rectas se crucen?

¿Qué condición deben cumplir tres vectores de V_3 para que su producto mixto sea 0?

¿Qué condición deben verificar los coeficientes de dos planos dados en forma general para que sean paralelas? y ¿para qué sean perpendiculares?

2.- Calcula el valor de m para que las rectas r y s tengan un punto en común y en ese caso, encuéntralo:

3.- Halla el punto simétrico de A(0,1,2) respecto del plano x-z=0.

4.- Halla las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección entre á y â, siendo á el plano que corta al eje OX en el punto de abscisa 2 y paralelo al plano YZ. â es el plano que contiene al punto P(0,1,1) y a la recta:

Soluciones:

2. m=3 6 P(1,-1,0)
3. (2,1,0)
4. x=2, y=1, z=ë

Geometría

1.- Discutir según los valores del parámetro "a" la posición de los tres planos:

$$ax+y+z=0$$
$$x+y-z=a$$
$$3x+ay=2$$

2.- a) Ecuación del plano que pasando por A(1,2,3) es paralelo a las rectas:

b) Ecuación de la recta que pasando por B(1,0,1) es perpendicular al plano:

c) Ecuación del plano que pasa por B(1,0,1) y por la recta r: $\{x+y-z+3=0;\ 2x-y-2z=0\}$

3.- Dado el plano de ecuación: $x-2y+3z+6=0$. Se pide:
a) Área del triángulo determinado por el plano dado al ser cortado por los ejes.
b) Ángulos del triángulo.
c) Volumen del tetraedro determinado por el plano dado y los tres planos que determinan la referencia.

4.- Distancia de un punto a un plano.

5.- Posición relativa de dos rectas en el espacio.

<u>Soluciones</u>:

1. a=2 se cortan en una recta; a=-3 se cortan dos a dos; a...2 y a...-3 se cortan en un punto
2. a) $x+y-3=0$; b) $(x-1)/3 = y/2 = (z-1)/-1$; c) $-2x+y+2z=0$
3. a) 3 $14u^2$; b) 31,95º; 68,15º; 79,90º; c) 6 u^3
%

Geometría

CUESTIONES:

1.- Deduce la fórmula de la distancia de un punto a un plano, explicando todos los pasos.

2.- Responde razonando las siguientes preguntas:
a) ¿Es posible que un plano quede determinado por el punto A(2,5,6) y por los vectores: v=(2,3,5) y w=(4,-6,-10)?

b) Si una recta r no es perpendicular ni paralela a un plano á, entonces:
- no es perpendicular a ninguna recta del plano.
- no puede cortar al plano
- siempre hay en á una recta perpendicular a r
- el producto escalar del vector normal a á y del vector director de r es cero.

3.- Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es compatible e indeterminado, ¿qué puede afirmarse geométricamente de este hecho?

4.- Una recta y un punto, ¿determinan siempre un plano?

EJERCICIOS:

1.- Ecuación de la recta que se apoya en las rectas r y s y es paralela a la recta t, siendo:

2.- Volumen de la pirámide triangular de base ABC con A(1,1,3), B(2,2,-1), C(2,0,3) y vértice V(0,1,2).

3.- Halla la ecuación del plano que pasa por el punto (1,0,1), es perpendicular al plano x-z+1=0 y es paralelo a la recta:

<u>Soluciones:</u>

2. a) No; b) siempre hay en á una recta perpendicular a r
3. 3 planos que se cortan en una recta. Una recta y un plano estando la recta contenida en el plano
4. No, si el punto P pertenece a la recta

E.1. {4x+y-z=0, 6x-y-9z+4=0}
E.2. V = 1 u^3
E.3. x+3y+z-2=0

Geometría

1.- a) Define el producto mixto de tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Expresión analítica. Interpretación geométrica.

b) ¿Cuánto vale el producto mixto de tres vectores coplanarios?. Razona la respuesta.

2.- a) Ángulo de recta y plano.

b) Determina el ángulo que forma el plano OXY con la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $x+z-2=0$.

3.- a) ¿Una recta y un punto determinan un plano?. Razona la respuesta siempre.

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (0,-1,1) y es paralela a los planos π: $x+2y-2=0$ y el plano π' determinado por los puntos (1,0,0), (0,2,0), (0,0,-1).

4.- Hallar el plano que pasa por el punto (1,1,0) paralelo a la recta $\{x-y+z=0;\ 2x-y=0\}$ y perpendicular al plano OXY.

5.- Sea P el punto (1,-3,2) y P' el simétrico de P respecto al plano $x+y=0$ y sea P'' el simétrico de P' respecto al punto (2,0,1). Hallar el área del triángulo por P y P'' y el origen de coordenadas.

6.- Determinar la posición de las rectas: r) $\{x+y-z=1,\ x-z+1=0\}$; s) $\{2x+y+3=0,\ z=3\}$

b) Hallar la distancia entre ellas

c) Hallar la distancia de A(0,4,1) a la recta r.

<u>Soluciones:</u>

2. b) 45º
3. $x/4 = (y+1)/-2 = (z-1)/3$
4. $2x-y-1=0$
5. $A = \sqrt{6}\ u^2$; P'=(3,-1,2), P''=(1,1,0)
6. Se cruzan; a) d=3; b) d=2

Geometría

1.- a) ¿Puede haber dos vectores u y v, tales que u.v=-3 si |u|=1 y |v|=2?. b) Hallar un vector perpendicular a u(1,1,2) y a v(1,0,2) que sea unitario.

2.- a) Explica razonadamente como hallarías la distancia de un punto a un plano, utilizando la interpretación geométrica del producto mixto.

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(0,-1,4) y es perpendicular a los planos: ð: 2x-y-5=0; ð': y+3z-2=0

3.- Dada la recta r y el plano ð:

Estudiar la posición de r y ð según los valores del parámetro "m"
Hallar la distancia entre r y ð para m=2
Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano OXY

4.- a) Dada la recta hallar la ecuación de la recta que pasa por P(1,2,1) y corta perpendicularmente a r.

5.- a) ¿Dos rectas paralelas determinan un plano? Razona la respuesta

b) Determinar la distancia que hay desde el origen de coordenadas al plano determinado por las rectas:

Soluciones:

1. a) No; b) " 1/ 5 (2,0,-1)
2. b) 3x+6y-2z+14=0
3. m=-2 paralelos, m...-2 se cortan; m=2 6 d=0; m=1 6 á=24,09º
4. (x-1)/0 = (y-2)/2 = (z-1)/1
5. a) Sí; b) 3

Geometría

1.- Define distancia de un punto a un plano

Deduce la fórmula:

2.- Halla las ecuaciones paramétricas de la recta proyección de sobre el plano ð: x-y+z+6=0

3.- Halla la ecuación de la recta que pasa por P(1,0,3) y corta perpendicularmente a la recta r: {x-y=1; -y+z=0}

4.- Sea la recta r: {2x-y=-2; 3x-y-z=-1} y el plano ð: 2x+ay+2z=5
a) Halla el valor de "a" para que "r" y "ð" sean paralelos
b) Halla el valor de "a" para que "r" sea perpendicular a "ð"

<u>Soluciones:</u>

2. {x=-13+5ë, y=-7+4ë, z=-ë}
3. x-1 = y =(z-3)/-2
4. a) a=-2; b) a=4

Geometría

1.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,0,-1), es paralela al plano: $2x+y+z=1$ y es perpendicular a la recta de intersección de los planos:

$$\begin{cases} 2x+z=5 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$$

2.- Consideramos las rectas de ecuaciones

a) Halla n para que r y s sean paralelas. ¿Y para que sean perpendiculares?
b) Para el valor de n=-1, determina la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.- a) Producto vectorial de dos vectores. Propiedades.
b) Distancia entre rectas

4.- Dada la pirámide de vértice B(-2,2,1) y base el paralelogramo ABCD, siendo A(1,1,2), B(4,5,2), C(1,1,3). Se pide:
a) Sitúa la pirámide en un sistema de coordenadas cartesianas.
b) Volumen de la pirámide.

5.- Ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,3,1) y que se apoya en las rectas:

<u>Soluciones:</u>

1. $(x-1)/1 = y/-2 = (z+1)/0$
2. a) $n=-1$; $n=2$; b) $2x+y+1=0$
4. b) $V = 5\ u^3$
5. $\{-9x+3y+z-19=0,\ 4x+y+3z-2=0\}$

Geometría

TEORÍA

1.- Sean a, b, c $\in V^3$ donde "." representa el producto escalar y "$\times$" el producto vectorial. Justifica cuáles de las siguientes expresiones no tienen sentido:

a) $a.(b.c)$ b) $|a|.(b\times c)$
c) $a.b + a\times c$ d) $|a| + b.c$
e) $|a| + (b\times c)$ f) $(a\times b) . c$

2.- ¿Dos rectas en el espacio que no tienen ningún punto en común, son necesariamente paralelas?

3.- Producto escalar. Propiedades.

PRÁCTICA

1.- Calcula m para que sean coplanarias las siguientes rectas:

2.- Calcular el ángulo comprendido entre los dos planos que pasando por el (1,1,1), contiene uno al eje OX y otro al eje OZ.

3.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,1,0) y es paralelo al plano $3x-y+z=2$ y corta a la recta $\{x-y+1=0;\ x-2y+z=-5\}$

4.- Hallar un punto que pertenezca al eje OX y que equidiste de los planos:

π_1: $4x-3y-3=0$
π_2: $2x+2y-z-1=0$

Soluciones:

1. $m=\pm 1$
2. $\alpha=60º$
3. $(x-1)/1 = (y-1)/2 = z/-1$
4. (2,0,0)

Geometría

Teoría
Distancia de un punto a un plano. Distancia entre planos.

Ejercicios:

1.- Dado el punto P(1,-1,3) y el plano á:2x-2y+z+2=0. Se pide:

a) Simétrico de P respecto a á
b) Ecuación del plano paralelo a á y que dista dos unidades de P
c) Área del triángulo que forman los puntos de corte del plano á con los ejes de coordenadas.

2.- Dadas las rectas: . Se pide:

a) Ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.
b) Ecuación de la recta que pasa por P(1,1,0) y se apoya en las rectas r y s.
c) Ecuación de la recta que corta a r y s y es perpendicular al plano: x+y+z-3=0

Soluciones:

1. a) (-3,3,1); b) $ð_1$: 2x-2y+z-1=0; $ð_2$: 2x-2y+z-13=0; c) A = 3/2
2. a) x+y-z=0; b) {-5x+y+z+4=0, 5x+y-3z=6}; c) {x-2y+z=2, x-y=3}

Geometría

1.- a) Vector característico de un plano.
b) Producto mixto. Definición e interpretación geométrica.

2.- Estudia la posición relativa de los planos á: x-y-z=4, â: 2x+y+z=2 y ð: x+2y+2z=-2

3.- Calcula el simétrico del origen de coordenadas respecto a la recta r dada por:
2x+y-2=0
x+z-2=0

4.- Calcula el volumen del tetraedro de vértices P(1,0,1) y los puntos en los que el plano de ecuación 6x+y+6z-6=0 corta a los ejes coordenados.

5.- Halla el valor de k para que el triángulo de vértices A(1,-5,k), B(4,-k,1) y C(5,-8,k) sea rectángulo en A. Calcula su área utilizando el concepto de producto vectorial de dos vectores.

Soluciones:

2. Se cortan en una recta
3. (2,0,2)
4. V = 1 u^3
5. k=1; A = 25/2

Geometría

Teoría: Distancia de un punto a una recta

Problemas:

1.- Calcular el volumen del tetraedro que tiene por vértices los puntos de intersección del plano ð: x+3y-2z=6 con los ejes coordenados y el origen de coordenadas.

2.- a) Punto simétrico del A(2,1,3) respecto del plano x+z=3
b) Punto simétrico de A respecto a la recta {x=2+t; y=1+t; z=1}

3.- Posición relativa de los planos:
á: x-2y+z=b
â: y-z=-2
å: 2x-ay=-2

4.- Determina la perpendicular común a r y s:

r:	x=1-ë	s:	x=-1+â
	y=2+ë	y=1	
	z=2+2ë		z=1-2â

<u>Soluciones</u>:

1. 6 u^3
2. a) A'=(0,1,1); b) A'=(2,1,-1)
3. a=2 y b=1 se cortan en una recta; a=2 y b...1 se cortan dos a dos; a...2 se cortan en un punto
4. x/2 = (y-1)/0 = (z+1)/1