

EXAMEN DERIVADAS

1. Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

3.) En qué punto del intervalo $(0, \delta)$ la recta tangente a $y = \text{tg}(x)$ tiene pendiente 2?.

4. Ecuación de la recta tangente a $x^2 + y - 3x = 3$ en $x = 1$.

6. Deriva $y = \ln^2 \left(\sqrt{\frac{\text{sen } x}{x^2 + 1}} \right)$

7. Deriva $y = e^{\text{tg } x} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{\text{sen}^2 x}}$

Soluciones:

1. Derivable en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

3. $x = \delta/4$

4. $y = x + 4$

6.
$$y' = 2 \ln \left(\sqrt{\frac{\text{sen } x}{x^2 + 1}} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{sen } x}{x^2 + 1}}} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\text{sen } x}{x^2 + 1}}} \frac{\cos x (x^2 + 1) - \text{sen } x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

7.
$$y' = e^{\text{tg } x} \frac{1}{\cos^2 x} \sqrt[3]{\frac{x^2}{\text{sen}^2 x}} + e^{\text{tg } x} \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{\text{sen}^2 x}\right)^2}} \frac{2x \text{sen}^2 x - x^2 \cdot 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x}{\text{sen}^4 x}$$

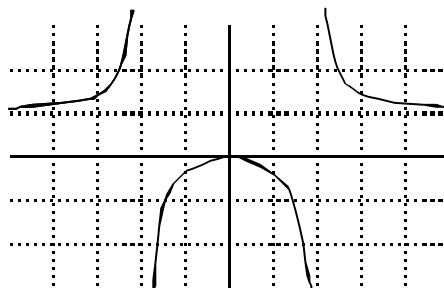
EXAMEN DERIVADAS

1. Estudia la derivabilidad de la función: $f(x) = |x^2 - x - 6|$
2. Ecuación de la recta tangente y la recta normal a $y = \ln(x+1)$ en $x=0$.
3. Deriva según la definición la función $y = 2x^2 + 3$
4. En qué puntos de la gráfica $y = x^3 - x^2$, la recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje OX.
5. Deriva $y = \operatorname{sen} \left(\ln \sqrt[3]{x^2 - e^{2x}} \right)$
6. Estudia y representa $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$
7. De todos los rectángulos que se pueden inscribir en una circunferencia de 2 cm de diámetro. ¿Cuál es del de área máxima?.

Soluciones:

1. Derivable en $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$
2. $y = x$; $y = -x$
3. $y' = 4x$
4. $x = 1$, $x = -1/3$
5. $y' = \cos \left(\ln \sqrt[3]{x^2 - e^{2x}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - e^{2x}}} \cdot \frac{1}{3 \sqrt[3]{(x^2 - e^{2x})^2}} \cdot (2x - e^{2x} \cdot 2)$.
7. $x = y = \sqrt{2}$

6.



EXAMEN DERIVADAS

1. a) Derivada de una función en un punto
 b) Deduce la derivada de $y = \sqrt{3 + x^2}$ en $x = 1$

2. Halla la ecuación de la tangente y la normal a la función $y = x \cdot e^x$ en $x = 0$

3. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Estudia su derivabilidad

4. Deriva las funciones:
 - a) $y = \ln^3 \left(\sqrt{3 + \operatorname{sen}(x^2)} \right)$
 - b) $y = \cos^2(3x) + \sqrt{1+x} - \operatorname{arctg}(2x^2)$
 - c) $y = x^{\operatorname{sen} x}$

Soluciones:

1. b) **2**

2. $y = x$

3. Derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

4. a) $y' = 3 \ln^2 \left(\sqrt{3 + \operatorname{sen} x^2} \right) \frac{1}{\sqrt{3 + \operatorname{sen} x^2}} \frac{\cos x^2 \cdot 2x}{2 \sqrt{3 + \operatorname{sen} x^2}}$

b) $y' = 2 \cos 3x (-\operatorname{sen} 3x) \cdot 3 + \frac{1}{2 \sqrt{1+x}} - \frac{4x}{1+(2x^2)^2}$

c) $y' = \left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) x^{\operatorname{sen} x}$

EXAMEN DERIVADAS

1. a) Ecuación de la recta tangente a $y = \ln x$ en $x = 1$.
b) Ecuación de la recta tangente a $y = e^{2x}$ en $x = 2$.
2. Estudia la derivabilidad de $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$
3.)En que punto la recta tangente a $f(x) = x^2 - 3x + 1$ forma con el eje OX un ángulo de: a) 45°; b) 60°?
4. Estudia y representa las funciones: a) $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$; b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$
6. Encuentra las dimensiones del cilindro de volumen máximo inscrito en una esfera de radio 4.

Soluciones:

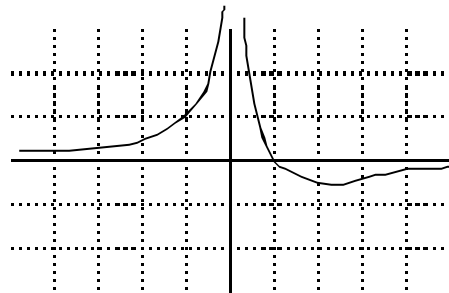
1. a) $y = x$; b) $y = 2e^4x - 3e^4$
2. Derivable en $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$
3. a) $x = 2$; b) $x = \frac{\sqrt{3} + 3}{2}$
6. $h = 8/\sqrt{3}$; $r = \sqrt{32/3}$

EXAMEN DERIVADAS

1. Determina las asíntotas de la curva $y = \frac{2x^3}{x^2 + x}$
2. Dada la función $y = x \cdot e^x$. Determina: a) concavidad y convexidad; b) Tangente a la curva en $x = 1$.
3. Representa la función: $y = \frac{1-x}{x^2}$
4. Una cuerda de 100 m se divide en dos partes. Con una se hace un cuadrado y con otra una circunferencia. Hallar la forma de dividirla para que la superficie sea máxima.

Soluciones:

1. $x = 0$, $x = -1$; $y = 2x - 2$
2. a) $(-4, -2)$ cóncava, $(-2, +4)$ convexa; b) $y = 2ex - e$
4. $x = \frac{400}{4 + \pi}$
- 3.



EXAMEN Derivadas/funciones

1. Estudia la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. Ecuación de la recta tangente a $y = \ln(3x)$ en el punto $x = 1/3$

3. Encuentra las dimensiones del cilindro de volumen máximo inscrito en una esfera de radio 2 cm.

4. Estudia y representa la función: $f(x) = \frac{3-x}{x^2-1}$

5. Deriva las funciones:

a) $y = \cos \left(\ln \left(\operatorname{sen} \sqrt{x} \right) \right)$

b) $y = x^{\operatorname{sen} x}$

c) $y = \frac{\ln \sqrt{x^2-1}}{\operatorname{sen}(3^x)}$

Soluciones:

1. Continua en \mathbb{U} , derivable en $\mathbb{U} \setminus \{1\}$

2. $y = 3x - 1$

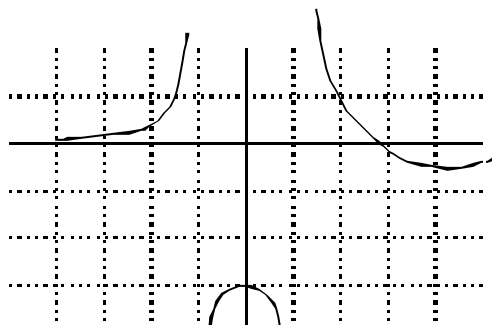
3. $h = 4/\sqrt{3}$; $r = \sqrt{8/3}$

5. a) $y' = -\operatorname{sen} \left(\ln \left(\operatorname{sen} \sqrt{x} \right) \right) \frac{\cos \sqrt{x}}{\operatorname{sen} \sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $y' = \left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) x^{\operatorname{sen} x}$;

c) $y' = \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} \frac{\operatorname{sen}(3^x)}{\sqrt{x^2-1}} - \ln \left(\sqrt{x^2-1} \right) \cos(3^x) \cdot 3^x \ln 3}{\operatorname{sen}^2(3^x)}$

4.



EXAMEN DERIVADAS

1. Halla m , para que la tangente en el punto de inflexión de la curva $y = x^3 - 6x^2 + mx - 2$ sea paralela a la recta $y = -6x + 2$

2. Dominio, máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

3. Representa gráficamente la función: $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ a) dominio; b) Asíntotas; c) Máximos y mínimos relativos.

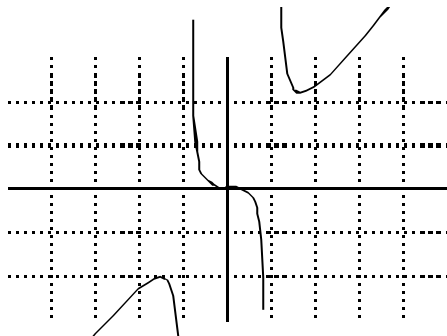
4. Entre todos los triángulos rectángulos de 5 m de hipotenusa halla el de mayor área.

Soluciones:

1. $m = 6$

2. dominio $(0, +\infty)$; mínimo $(1, 0)$, máximo $(e^2, 4e^2)$; Crece $(0, e^2)$; Decrece $(e^2, +\infty)$

3. a) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; b) $x = -1, y = x$; c) $\max x = -\sqrt{3}$, $\min x = +\sqrt{3}$



4. $5/\sqrt{2}$, $5/\sqrt{2}$, 5

EXAMEN DERIVADAS

1. Estudiar la derivabilidad de:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 4x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2. a)) En qué punto del intervalo $(0, 2\delta)$, la recta tangente a la función $y = \cos(x)$ tiene de pendiente $1/2$? b)) Dónde es la recta tangente paralela al eje OX?

3. Ecuación de la recta tangente a $x^2 + \sin(2x) = y$, en $x = 0$.

4. Deriva $y = \sin^3 \left(\sqrt{\ln(x+1)} \right)$

5. Deriva $y = \cos \left(\sin \left(10^{x^2-1} \right) \right)$

Soluciones:

1. Continua y derivable en \mathbb{R}

2. a) $7\delta/6$, $11\delta/6$; b) δ

3. $y = 2x$

4. $y' = 3 \sin^2 \left(\sqrt{\ln(x+1)} \right) \cos \left(\sqrt{\ln(x+1)} \right) \frac{1}{2 \sqrt{\ln(x+1)}} \frac{1}{x+1}$

5. $y' = -\sin \left(\sin \left(10^{x^2-1} \right) \right) \cdot \cos \left(10^{x^2-1} \right) \cdot 10^{x^2-1} \cdot 2x \cdot \ln 10$

EXAMEN DERIVADAS

1. Calcula la derivada de $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$
2. Dada la función $y = e^x - x$. Halla: a) Máximos y mínimos; b) Crecimiento y decrecimiento; c) gráfica de la función.
3. a) Deriva y simplifica la siguiente función: $y = \ln(\sqrt{e^x} + 1)$. b) Halla la ecuación de la tangente en el punto de abscisa $x = 0$.
4. Una cierta población crece de acuerdo con la ecuación $x = 1 + 0,2te^{0,2t}$, donde t es el tiempo en meses y x es el número de individuos en miles. Calcula la velocidad de crecimiento de la población al cabo de 10 meses.

Soluciones:

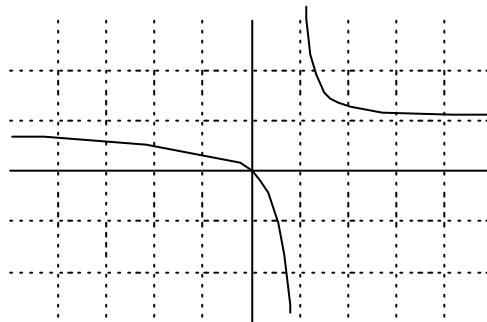
1. $y' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x \cdot \ln x} + \operatorname{cos} x \cdot \ln(\ln x) \right) (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$
2. a) Min (0, 1); b) decrece (-4, 0), crece (0, + 4)
3. a) $y' = \frac{\sqrt{e^x}}{2(\sqrt{e^x} + 1)}$; b) $y = x/4 + \ln 2$
4. $0,04 \cdot e^2$

EXAMEN FUNCIONES

1. Halla el dominio de la función: $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x}{x - 2}}$
2. Estudia y representa la función: $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$
3. Hallar la función inversa de $f(x) = \sqrt{\frac{x - 3}{x + 2}}$. Comprueba el resultado.

Soluciones:

1. $[-1, 0] \cup (2, +\infty)$
2. Dom: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; asíntotas: $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$



3. $y = \frac{-2x^2 - 3}{x^2 - 1}$

EXAMEN FUNCIONES

1. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = 2x + 1$ calcula:

- a) $f(x) + g(x)$ b) $f(x) \cdot g(x)$ c) $f(x)/g(x)$ d) $(f \circ g)(x)$ e) $g^{-1}(x)$

2. Dada la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

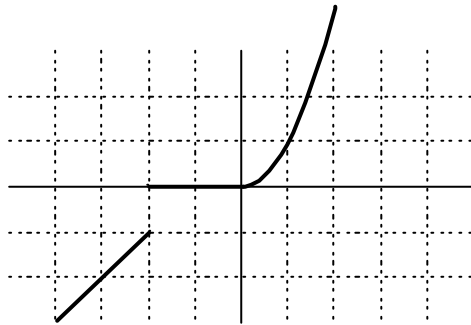
- a) $f(x)$ b) $\frac{1}{f(x)}$ c) $\sqrt{f(x)}$

3. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -2 \\ 0 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) Representála
b) Calcula su dominio.
c) Estudia la continuidad.

Soluciones:

1. a) $x^2 + x + 1$; b) $2x^3 - x^2 - x$; c) $\frac{x^2 - x}{2x + 1}$; d) $4x^2 + 2x$; e) $y = \frac{x - 1}{2}$
2. a) \mathbb{R} ; b) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$; c) $(-4, -3] \cup [1, +\infty)$
3.



- b) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; c) continua en $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

EXAMEN FUNCIONES

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2+4 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Calcula el dominio

b) Representala

2. Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$

c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x-3}$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x^2+2x-3}}$

3. a) Define dominio de una función

b) Explica razonadamente cuántas veces puede una función cortar al eje X y al eje Y.

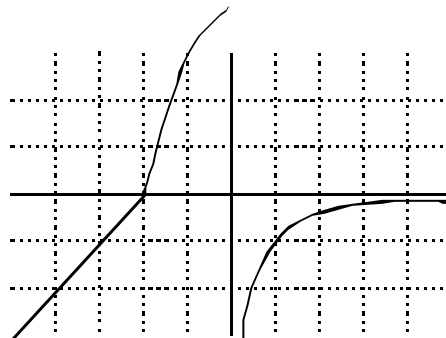
4. Halla los cortes con los ejes y las asíntotas (si los tienen) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$ c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

d) $f(x) = \frac{2}{x} + 2$ e) $f(x) = \frac{-3x^2}{x+1}$

Soluciones:

1. a) Dom: \mathbb{R}

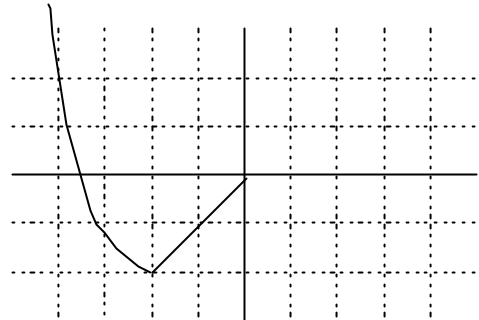


2. a) $(-4, -1] \cup [2, +4)$; b) $(-4, -1) \cup (2, +4)$; c) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$; d) $(-3, -2] \cup (1, +4)$

4. a) $(0, 0)$, No tiene asíntotas; b) $(0, 2/9)$; $x = 3$; c) $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $y = 1$; d) $(-1, 0)$, $x = 0$, $y = 2$; e) $(0, 0)$, $x = -1$, $y = -3x - 3$

EXAMEN FUNCIONES

1. a) Dadas $f(x) = \sqrt{x} + 1$ y $g(x) = \frac{x+2}{x}$, halla $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$



b) Completa para que sea impar la gráfica:

2. Dada la función polinómica $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

a) Calcula las raíces y factoriza

b) Calcular el dominio de: b.1) $f(x)$; b.2) $1/f(x)$; b.3) $\sqrt{f(x)}$

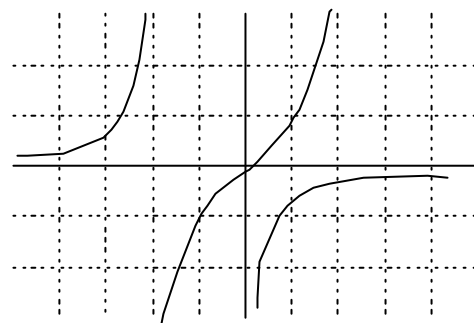
3. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) Representa $f(x)$

b) Calcula $f(-2)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2)$

c) Estudia la continuidad de $f(x)$



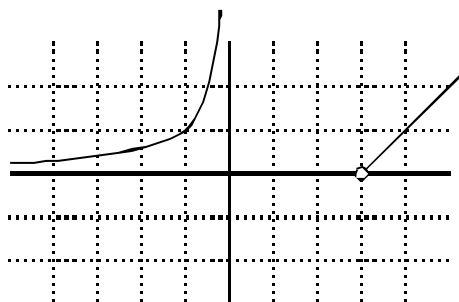
4. Estudia las características de la función:

Soluciones:

1. a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x}} + 1$; $(g \circ f)(x) = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1}$

2. a) $x = -1, x = 2$; $(x+1)(x-1)(x+2)$; b) b.1) \mathbb{R} ; b.2) $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$; b.3) $(-2, 1) \cup (1, +\infty)$

3. a) b) $f(-2) = 1/4$; $f(-1) = 1$; $f(1) = 0$; $f(2) = 0$; c) Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$



EXAMEN FUNCIONES

1. Dibuja una función que cumpla al mismo tiempo las siguientes condiciones:

$$C \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

$$C \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

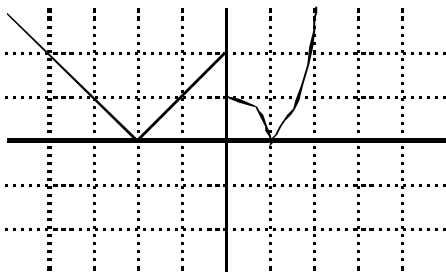
C su tendencia en $x = 0$ sea 1 y el valor de la función en $x = 0$ sea 3.

2. a) Representa $|f(x)|$ siendo $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

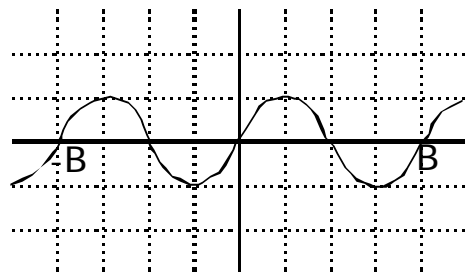
3. Traza la gráfica de la función $f(x) = \sin(2x)$ e indica su período.

Soluciones:

2.



3. período: δ



EXAMEN FUNCIONES

1. Define:

- a) Dominio de una función.
- b) Recorrido de una función.

2. Dadas las funciones $f(x) = \frac{2x+1}{2+x}$ y $g(x) = x^2 - 1$, calcula la función f compuesta con g y la función inversa de f.

3. Halla el dominio de las funciones: a) $f(x) = \frac{x+3}{x^3+x^2-2x}$, b) $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$

4. Dada la función $y = \log_2 x$, represéntala gráficamente. Analiza las propiedades que verifica.

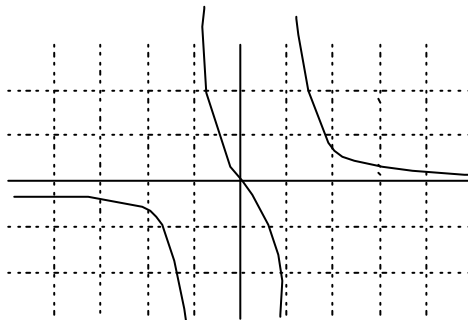
5. Estudia y representa la función $y = \frac{x}{x^2-1}$

Soluciones:

2. a) $\left(\frac{2x+1}{2+x}\right)^2 - 1$; b) $y = \frac{1-2x}{x-2}$

3. a) $\cup\{-2, 0, 1\}$; b) $(-2, 0] \cup (2, +4)$

5.



EXAMEN FUNCIONES

1. Halla las funciones derivadas y calcula los valores de las mismas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x+1}$ en $x=1$; b) $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$ en $x = \delta/2$;

c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ en $x=4$; d) $i(x) = \ln x^2$ en $x=2$

2. Estudiar los intervalos de crecimiento y extremos relativos en las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$; b) $y = \sqrt{x+1}$

3. Representa las siguientes funciones. Traza la recta tangente en los puntos que se indica. Halla la ecuación de las mismas.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en $x=1$ b) $g(x) = 1/x$ en $x = -1$

4. a)) En qué puntos la tangente a la gráfica de la función: $f(x) = 2x^2 + 3x$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

b)) Y dónde es paralela al eje de abscisas?

Soluciones:

1. a) $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2}$ $f'(1) = \frac{1}{4}$; b) $g'(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$, $g'(\delta/2) = 0$;

c) $h'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}$ $h'(4) = \frac{5}{4}$; d) $i'(x) = \frac{2}{x}$ $i'(2) = 1$

2. a) Crece $(-4, -2) \cup (1, +4)$, decrece $(-2, 1)$, máx $(-2, 20)$, mín $(1, -7)$; b) Crece $(-1, +4)$

3. a) $y = 4x - 4$; b) $y = -x - 2$

4. a) $x = -1/2$; b) $x = -3/4$

EXAMEN FUNCIONES

1. Define:

- a) Función par. ¿A qué tipo de simetría da lugar?.
- b) Función acotada inferiormente.
- c) Función monótona decreciente.

2. a) Halla el dominio de $y = \frac{1}{x^2 - x - 6}$

b) Halla el recorrido de la función $y = \cos(2x)$

c) Halla la función inversa de $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}$

3. Representa la función $y = |x^2 - 3x + 2|$ tras representar primero la función $y = x^2 - 3x + 2$. Analiza sobre la gráfica sus extremos y su monotonía.

4. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y estudia su continuidad indicando si es evitable o no.

5. Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

Soluciones:

2. a) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$; b) $[-1, 1]$; c) $y = \frac{1-3x}{2x-1}$

3. min (1,0) y (2,0), max (3/2, 1/4); crece $(1, 3/2) \cup (2, +\infty)$, decrece $(-\infty, 1) \cup (3/2, 2)$

4. Continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, No evitable

5. a) 0; b) -1/2

