CÁLCULO DIFERENCIAL

1.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{x}{(x-1)(x+2)};\quad g(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2-2x};\quad h(x)=\left|\,x^2+x-2\,\right|$$

$$i(x)=\begin{cases} 3x & si \quad x\le -2 \\ e^x & si \quad -2<x<0 \\ cosx & si \quad x\ge 0\end{cases}\quad j(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & si \quad x\ne 1 \\ 1 & si \quad x=1\end{cases}\quad k(x)=\begin{cases} x-2 & si \quad x\le 1 \\ x^2-2 & si \quad x>1\end{cases}$$

$$l(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x\ne 1 \\ 3 & si \quad x=1\end{cases}\quad m(x)=\begin{cases} x\ sen\dfrac{1}{x} & si \quad x\ne 0 \\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$$

Sol: f(x) continua en $\mathbb{R}$-{1,-2}; g(x) continua en $\mathbb{R}$-{-2,0,1}; h(x) continua en $\mathbb{R}$; i(x) continua en $\mathbb{R}$-{-2}; j(x) continua en $\mathbb{R}$-{1}; k(x) continua en $\mathbb{R}$; l(x) continua en $\mathbb{R}$-{1}; m(x) continua en $\mathbb{R}$

2.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a)\ y=\frac{x-2}{x^3-x^2-2x}\quad b)\ y=\ln\ [(x-3).(x+1)]\quad c)\ y=e^x;\quad d)\ y=tg\ 3x$$

$$e)\ y=\left|\,x-1\,\right|\quad f)\ y=\frac{1}{\ln\ |x-1|};\quad g)\ y=\sqrt{1-x^2};\quad h)\ f(x)=\begin{cases} x^2-x & si \ x<0 \\ \dfrac{x}{(x-1)(x-3)} & si \ 0\le x\le 2 \\ -x^2+2 & si \ x>2\end{cases}$$

Sol: a) continua en $\mathbb{R}$-{-1,0,2}; b) continua en $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$; c) continua en $\mathbb{R}$; d) continua en $\mathbb{R}$-{π/6 + kπ/3}; e) continua en $\mathbb{R}$; f) continua en $\mathbb{R}$-{0,1,2}; g) continua en [-1,1]; h) continua en $\mathbb{R}$-{1}

3.- Hallar m y n para que sea continua la función:

$$f(x)=\begin{cases} senx & si \quad x<0 \\ mx+n & si \quad 0\le x\le 2 \\ x^2 & si \quad x>2\end{cases}$$

Sol: m = 2; n = 0

4.- Probar que la ecuación x^3-3x-1=0 tiene por lo menos una raíz real en el intervalo (1,2).

5.- a) Comprueba que la función f(x)=x^2+x-1 corta al eje de abscisas en algún punto de [0,2], b) se puede decir lo mismo de la función f(x) = (x^3-3)/(x-1)?

Sol: a) Sí; b) No cumple Bolzano

6.- La función y = sec(x) toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [0,π] y, sin embargo, no se anula en él, ¿contradice esto el teorema de Bolzano?

Sol: No

7.- Demuestra que si una función f(x) es continua en el intervalo [a,b] y existe un número k tal que f(b)<k<f(a) entonces existe un número c0(a,b)/f(c)=k.

8.- Estudia la derivabilidad de las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & si \quad x \le 0 \\ \operatorname{sen} x & si \quad x > 0 \end{cases}$ b) g(x) = |x-1| c) h(x) = $|x^2+5x+6|$

Sol: f(x) derivable en ú; g(x) derivable en ú-{1}; h(x) derivable en ú-{-2,-3}

9.- Calcula "a" y "b" para que la función f sea derivable en todo ú.

$f(x)=\begin{cases} ax^2+2 & si \quad x \le 2 \\ x^2+bx-4 & si \quad x > 2 \end{cases}$ Sol: a = 5/2; b = 6

10.- Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} 2 & si \ \ x < 0 \\ x^2+2 & si \ \ 0 \le x \le 3 \\ x-4 & si \ \ x > 3 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1} & si \ \ x \ne 1 \\ 0 & si \ \ x = 1 \end{cases}$

c) h(x) = |x-1| d) $y=\sqrt{4 - x^2}$ e) $f(x)=\begin{cases} x^3 \ sen \dfrac{1}{x} & si \ \ x \ne 0 \\ 0 & si \ \ x = 0 \end{cases}$

Sol: a) f(x) continua y derivable en ú-{3}; b) f(x) continua y derivable en ú-{1}; c) h(x) continua en ú y derivable en ú-{1}; d) f(x) continua en [-2,2]; derivable en (-2,2); e) f(x) continua ú y derivable en ú.

11.- Comprueba que la ecuación $x^3+2x^2-x-1 = 0$ tiene una solución en el intervalo [0,1]

12.- Estudia si la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$ está acotada en el intervalo [0,4]

Sol: No

13.- Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$; $si \ \ x \ne 1$, obténgase la derivada enésima de f(x).

Sol: $f^n(x)=\dfrac{(-1)^n \ n!}{(x+1)^{n+1}}$

14.- Dada la función f(x)=ln(x+1), si x>-1, obténgase la derivada enésima de f(x).

Sol: $f^n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1} \ (n-1)!}{(x+1)^n}$

15.- Encuentra K, para que la función f(x) = x^2 - Kx, tenga en x = 2, una recta tangente que forme un ángulo de 45º con el eje de abscisas. Sol: K = 3

16.- Halla a para que la función $y=ax^2+2x+3$ tenga en x=1 una recta tangente que forme un

ángulo de 45º con el eje de abscisas.
Sol: a=-1/2

17.- Halla los puntos de la función y = x^3-3x^2+1, en los cuales la tangente es paralela a la recta y=9x+2. Sol: -1, 3

18.- Halla la ecuación de las rectas tangentes y normales a las curvas en los puntos que se indican:

$a)\ y = (x+1)\ \sqrt{x-2}\quad en\ x = 3;\quad b)\ y = \sqrt[3]{x-1}\quad en\ x = 0$

$c)\ y\ =\ \dfrac{sen(x)\ -\ \cos(x)}{sen^2 x}\quad en\ x = \dfrac{p}{4}\qquad d)\ y = e^{-\frac{1}{x}}\ +\ \ln\ x\quad en\ x = 1$

Sol: a) y=3x-5; x+3y-15=0; b) y=x/3 -1; y=-3x-1;
c) y=2$\sqrt{2}$ x-ð$\sqrt{2}$ /2; y=-x/2$\sqrt{2}$ +ð/8$\sqrt{2}$;
d) $y = \dfrac{1+e}{e}\ x\ -\ 1 \qquad y = \dfrac{-e}{1+e}\ x\ +\ 1\ +\ \dfrac{1}{e^2+e}$

19.- La curva y = ax^2+bx+c pasa por el punto P(1,5), y es tangente en el punto (0,1) a la bisectriz del primer cuadrante. Halla la ecuación de la curva. Sol: y = $3x^2+x+1$

20.- ¿En qué puntos del intervalo (0,5) la tangente a la curva y = arctg(2x) es paralela a la recta 2x-37y=6. Sol: x=3

21.- ¿En qué puntos de la curva y = x^3-x^2-2x la recta tangente forma un ángulo de 135º con la parte positiva del eje de abscisas?. Sol: x = -1/3, 1

22.- ¿Satisface la función f(x)=2-|x-1| las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [-2,2]? ¿Y la función $\sqrt[3]{x}$?
Sol: No, No

23.- Indicar si las funciones f y g verifican las hipótesis del teorema del valor medio (de Lagrange) y, en caso afirmativo, encontrar los puntos intermedios cuya existencia asegura el teorema:
a) f(x) = x^2-x+1 en [0,2]. b) g(x) = lnx en [1,e]
Sol: a) x=1; b) x=e-1

24.- La función f(x) = x^3-9x+1 cumple el teorema de Rolle en el intervalo [0,b]. ¿Cuál es el valor de b? Hallar el punto intermedio cuya existencia asegura el teorema. Sol: b = 3; x = $\sqrt{3}$

25.- Halla la fórmula para la derivada n-ésima de las siguientes funciones:
a) f(x) = x.e^x; b) g(x) = ln(3-x); c) h(x) = e^{-x}-e^x

Sol: a) $f^n(x) = (x+n)\ e^x$; b) $g^n(x) = \dfrac{(-1)^n (n-1)!}{(3-x)^n}$; c) $h^n(x) = (-1)^n\ e^{-x} - e^x$

26.- Halla el valor de a para que la función y=x^2-ax+2 tenga un mínimo en x=1. Sol: a=2

27.- Halla a, b, c y d para que la función f(x)=ax^3+bx^2+cx+d tenga un máximo en el punto (0,1) y un mínimo en (1,2). Sol: f(x)=$-2x^3+3x^2+1$

30.- Halla el valor de a para que la función $y=x^2+2x+a$ tenga un mínimo en x=1. Sol: œa0ú.

31.- Halla b, c y d para que la función x^3+bx^2+cx+d tenga un extremo en (2,0) y un punto de inflexión en x=1. Sol: $y=x^3-3x^2+4$

32.- Estudia si las siguientes funciones cumplen las hipótesis del teorema del valor medio. En caso afirmativo calcula el punto que dice el teorema que tiene que existir:

a) $f(x)=\sqrt{x+1} \quad en\ [0,3]$ b) $g(x)=senx \quad en \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ Sol: x = 5/4; x = arcos $2/\pi$

33.- ¿Cumple la función $f(x) = |x^2-4|$ el teorema de Rolle en el intervalo [1,3]?. Sol: No

34.- La función $y = \sqrt{x}$ cumple el teorema del valor medio en el intervalo [4,6]? ¿Y en el intervalo [-2,2]?. Sol: Sí, No

35.- ¿Cumple el teorema del valor medio la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<3 \\ x^2-40x+8 & x\geq 3 \end{cases} \quad en\ [2,6]?$$ Sol: Sí; x = 17/5

36.- Comprobar si $f(x)=x^2-2x+1$ cumple el teorema de Rolle en el intervalo [0,2]. Sol: Sí

37.- Comprobar si $f(x)=x^2-2|x|+1$ cumple el teorema de Rolle en el intervalo [-1,1]. Sol: no

38.- Comprobar si la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x<0 \\ 3x-4 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$ cumple el teorema de Bolzano en el intervalo [-1,1]. Sol: no

39.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-x}$ b) $g(x)=\dfrac{x-3}{\ln|x-1|}$ c) $h(x)=|\ x^2-3x+2\ |$

d) $i(x)=\begin{cases} x-1 & si & x\leq 1 \\ x^2-1 & si & 1<x<2 \\ x+2 & si & x\geq 2 \end{cases}$ e) $j(x)=\begin{cases} x^2 & si & x<-1 \\ x-1 & si & -1\leq x\leq 0 \\ x^3+1 & si & x>0 \end{cases}$

Sol: a) f(x) continua en $\mathbb{R}-\{0,1\}$; b) g(x) continua en $\mathbb{R}-\{0,1,2\}$; c) h(x) continua en $\mathbb{R}$; d) i(x) continua en $\mathbb{R}-\{2\}$; e) j(x) continua en $\mathbb{R}-\{-1,0\}$

40.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & si\ \ x \neq -1 \\ -2 & si\ \ x=-1 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x<-1 \\ \dfrac{x-1}{(x+2)\,x} & si\ \ -1 \le x \le 1 \\ x^2-3 & si\ \ 1 \le x < 3 \\ \dfrac{-8x}{x^2-6x+5} & si\ \ x \ge 3 \end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} sen\, x & si\ \ x<\dfrac{p}{2} \\ \cos x-1 & si\ \ x \ge \dfrac{p}{2} \end{cases}$ d) $i(x)=\begin{cases} (x-1)\ \cos\ \dfrac{1}{x-1} & si\ \ x \neq 1 \\ 0 & si\ \ x=1 \end{cases}$

Sol: a) continua en ú; b) continua en ú-{0,1,5}; c) continua en ú-{ð/2}; d) continua en ú

41.- Probar que la ecuación x^3-3x-1=0 corta al eje X en el intervalo (1,3).

42.- Cumple la función $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-1}$ el teorema de Bolzano en el intervalo [0,4]. Sol: No

43.- Estudiar la derivabilidad de la función f(x)=x^2-3|x|+2. Sol: derivable en ú-{0}

44.- Hallar a y b para que sea continua la función:

$$f(x)=\begin{cases} a\,x^2 & si & x \le 1 \\ 3ax-b & si & 1<x \le 2 \\ x^2 & si & x>2 \end{cases}$$

Sol: a = 1; b = 2

45.- Estudia la derivabilidad de las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si & x \le 1 \\ 2x+1 & si & x>1 \end{cases}$ b) $g(x)=\left|\ x-4\ \right|$ c) $h(x)=\left|\ x^2+x-2\ \right|$

Sol: a) f(x) derivable en ú; b) g(x) derivable en ú-{4}; c) h(x) derivable en ú-{-2,1}

46.- Calcula "a" y "b" para que la función f sea derivable en todo ú.

$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & si & x \le 1 \\ bx+2x-1 & si & x>1 \end{cases}$ Sol: a = 1; b = 0

47.- Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & si\ \ x<-1 \\ x^2+x+1 & si\ \ -1 \le x \le 1 \\ x & si\ \ x>1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & si\ \ x \neq 3 \\ 0 & si\ \ x=3 \end{cases}$

c) f(x)=$|x^2+2x+1|$ d) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ e) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<1 \\ 2x & si \quad 1\leq x<2 \\ \dfrac{2x^2+4}{3} & si \quad x>2 \end{cases}$

Sol: a) f(x) continua y derivable en ú-{-1,1}; b) f(x) continua y derivable en ú-{3}; c) f(x) continua en ú y derivable en ú-{-1}; d) f(x) continua en [-2,2]; derivable en (-2,2); e) f(x) continua ú y derivable en ú-{2}.

48.- Comprueba que la ecuación $x^3-2x-2 = 0$ tiene una solución en el intervalo [0,2]

49.- Estudia si la función $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2-2x-3}$ está acotada en el intervalo [1,4]

Sol: No

50.- Obténgase la derivada enésima de f(x):

a) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$; $si \ x \neq -1$ b) f(x)=ln(x-2) x>2 c) f(x) = e^{2x}

Sol: $a)\ f^n(x)=\dfrac{(-1)^n\ n!}{(x+1)^{n+1}}$ $b)\ f^n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}\ (n-1)!}{(x-2)^n}$ $c)\ f^n(x)=2^n\ .\ e^{2x}$

51.- Encuentra K, para que la función f(x) = $x^3 - Kx^2 + 3$, tenga en x = 1 por recta tangente y=-x+3. Sol: K = 2

52.- Halla los puntos de la función y = $2x^3-3x^2+12x$, en los cuales la tangente es paralela a la recta y=24x-10. Sol: -1, 2

53.- Halla la ecuación de las rectas tangentes y normales a las curvas en los puntos que se indican:

a) y=arctg(x) en x=1 b) y=ln(x+2) en x=-1

Sol: a) y=1/2 x+(ð-2)/4; y=-2x+2+ð/4; b) y=x-1; y=-x+1

54.- La curva y = ax^2+bx+c pasa por el punto P(1,8), y tiene un mínimo en x=(0,5). Halla la ecuación de la curva. Sol: y = $3x^2+5$

55.- Halla la ecuación de las rectas tangentes a las curvas:

a) y=$x^2.e^x$ en x=1 b) y=sen^2x en x = ð/4

Sol: a) y=3ex-2e; b) y=x - ð/4 + 1/2

56.- ¿En qué puntos del intervalo (0,5) la tangente a la curva y = arctg(2x) es paralela a la recta 2x-17y+34=0. Sol: x=2

57.- ¿En qué puntos de la curva y = x^2-3 la recta tangente forma un ángulo de 45º con la parte positiva del eje de abscisas?. Sol: x = 1/2

58.- ¿Satisface la función f(x)=$x^2-2|x|$ las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [-

1,1]? ¿Y la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & si \quad x<1 \\ x^2-x+1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ en [-2,3]?

Sol: No, No

59.- Indicar si las funciones f y g verifican las hipótesis del teorema del valor medio (de Lagrange) y, en caso afirmativo, encontrar los puntos intermedios cuya existencia asegura el teorema:

a) $f(x) = x^2+3^x$ en [0,1]. b) g(x) = arctg(x) en [0,ð/4]

Sol: a) x=1/2; b) $x=\sqrt{\frac{p}{4}-1}$

60.- La función $f(x) = x^3-13x+2$ cumple el teorema de Rolle en el intervalo [1,b]. Cuál es el valor de b? Hallar el punto intermedio cuya existencia asegura el teorema. Sol: b = 3; $x = \sqrt{\frac{13}{3}}$

61.- Halla la fórmula para la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2.e^x$; b) f(x) = ln(x+2); c) $f(x) = e^x+e^{-2x}$

Sol: a) $f^n(x) = (x^2+2nx+n^2-n).e^x$; b) $f^n(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+2)^n}$;

c) $f^n(x)=e^x+(-1)^n2^ne^{-2x}$

62.- Estudia si las siguientes funciones cumplen el teorema de Rolle en el intervalo que se indica. En caso afirmativo halla el punto en que se anula la derivada:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & si \quad x<1 \\ x^2-x+1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ *en [-2,3]* ; b) $g(x)=\sqrt[3]{x}$ *en [-2,2]*

Sol: f(x) Sí, x=0; g(x) No

63.- Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3-3x^2+2$ en su punto de inflexión. Sol: y=-3x+3

64.- Hallar el valor de a para que la función $y=x^2-ax+2$ tenga un mínimo en x=1. Sol: a=2

65.- Hallar el valor de a para que la función $y=x^2+2x+a$ tenga un mínimo en x=-1. Sol: œaΘú

66.- Hallar a, b, c y d para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un máximo en el punto (0,1) y un mínimo en (1,2). Sol: $f(x)=-2x^3+3x^2+1$

67.- Hallar b, c y d para que la función x^3+bx^2+cx+d tenga un extremo en (2,0) y un punto de inflexión en x=1. Sol: $f(x)=x^3-3x^2+4$